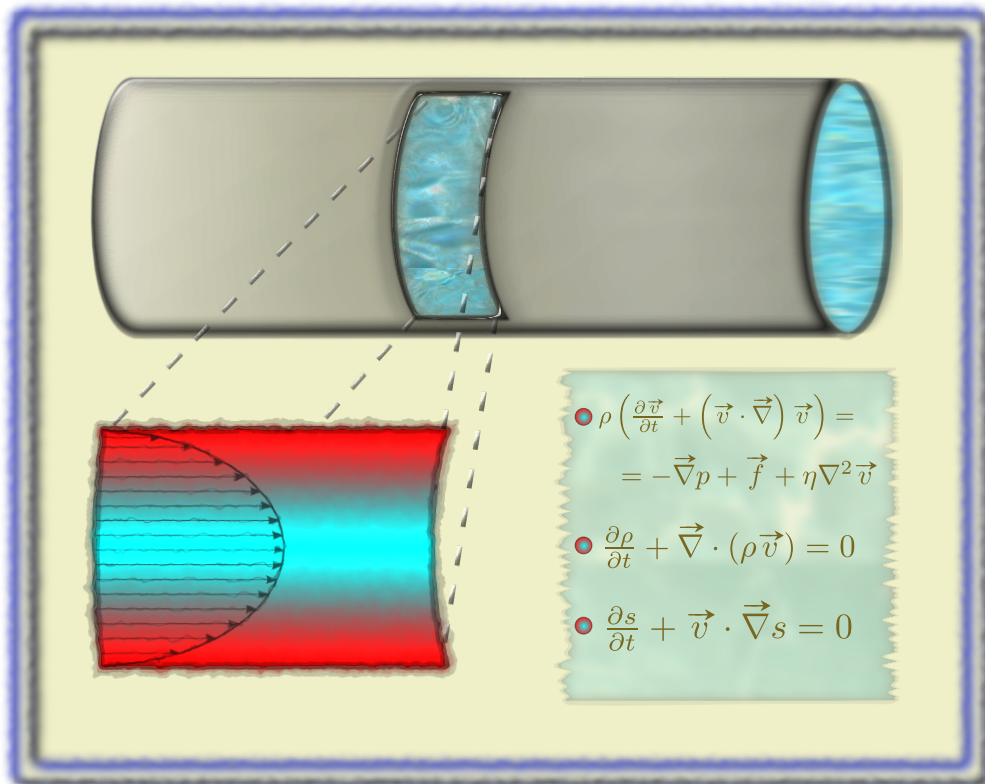


Mecánica del Continuo

BASADO EN LOS APUNTES DE ANA MARÍA PLATZECK



Facultad de Ciencias
**Astronómicas
y Geofísicas**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

2^{DO} CUATRIMESTRE - 2023

Índice general

Introducción	v
I Dinámica de partículas	1
I.1 Definiciones básicas	1
I.2 Leyes de Newton – Sistemas inerciales	2
I.3 Trabajo y energía	4
I.4 Integral de movimiento	8
I.5 Impulso angular – Fuerzas centrales	9
I.6 Osciladores lineales	10
I.6.1 Osciladores lineales unidimensionales	11
I.7 Movimiento unidimensional conservativo	16
I.8 Sistemas de Partículas	19
I.8.1 Trabajo	23
I.8.2 Potenciales Generalizados	24
I.9 Campo y potencial gravitatorios	24
I.10 Vínculos – Coordenadas generalizadas	30
I.11 Principio de Hamilton – Ecuaciones de Lagrange	32
I.11.1 Teoremas de Conservación	38
I.12 Sistemas no inerciales	41
II Tensores cartesianos	45
II.1 Matrices	45
II.2 Sistemas de coordenadas	48
II.3 Transformación de coordenadas	50
II.3.1 Transformaciones ortogonales	51
II.4 Tensores cartesianos	52
II.4.1 Diagonalización de tensores de 2 ^{do}	56
III Movimiento del cuerpo rígido	59
III.1 Conceptos básicos del cuerpo rígido	59
III.2 Velocidad angular	61
III.3 Energía cinética - Tensor de inercia	63
III.4 Impulso angular del cuerpo rígido	66
III.5 Relación entre Ω y los ángulos de Euler	69

III.6	Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido	70
III.6.1	Lagrangiano	70
III.6.2	Ecuaciones de Euler	71
III.7	Trompo simétrico libre	73
IV	Elasticidad lineal	77
IV.1	Deformación – Tensor de deformaciones	77
IV.2	Fuerzas y tensor de tensiones	82
IV.3	Ecuación de equilibrio	89
IV.4	Trabajo	90
IV.5	Ley de Hooke	92
IV.6	Deformación por temperatura	94
IV.7	Ecuación de movimiento	95
IV.8	Ejemplos	97
V	Propagación de ondas – Ondas elásticas	105
V.1	Ondas unidireccionales	105
V.1.1	Solución general	106
V.2	Ondas tridimensionales	107
V.3	Velocidad de fase y velocidad de grupo	110
V.4	Ondas en medios elásticos – Caso general	112
VI	Fluidos ideales	115
VI.1	Descripción de un fluido - Derivada substancial	115
VI.2	Ecuación de continuidad	117
VI.3	Ecuación de movimiento	118
VI.4	Fluidos ideales - Ecuación de Adiabaticidad	119
VI.5	Hidrostática	120
VI.5.1	Estabilidad de una atmósfera en equilibrio	122
VI.6	Tensión superficial	124
VI.6.1	Coefficiente de tensión superficial	125
VI.6.2	Otra forma de entender la tensión superficial...	128
VI.6.3	Comportamiento de la superficie. Ángulo de contacto.	131
VI.7	Líneas de corriente	132
VI.8	Ecuación de Bernoulli	132
VI.9	Vorticidad - Fuentes y sumideros	134
VI.9.1	Circulación	135
VI.10	Ondas de sonido	137
VI.10.1	Criterios para incompresibilidad	139
VI.11	Flujo irrotacional	140
VI.11.1	Flujo potencial	141
VI.12	Flujo bidimensional	144
VI.12.1	Uso de la variable compleja	146

VII Fluidos reales	149
VII.1 Ecuación de Navier-Stokes	149
VII.2 Flujos laminar y turbulento	152
VII.3 Presión modificada	154
VII.4 Flujo unidireccional estacionario	154
VII.4.1 Flujo de Poiseuille	155
VII.5 Parámetros adimensionales – Ley de similitud	156
VII.6 Capa límite	158
A Resultados matemáticos	161
A.1 Cálculo vectorial	162
A.1.1 Identidades vectoriales	162
A.1.2 Teoremas integrales	163
A.1.3 Operadores diferenciales	163
B Elasticidad	166
B.1 Relaciones entre constantes	166
B.2 Elasticidad en coordenadas curvilíneas	167
C Fluidos	169
C.1 Coordenadas cilíndricas	169
C.1.1 Tensor de tensiones	170
C.1.2 Ecuación de continuidad	170
C.1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes	170
C.2 Coordenadas Esféricas	170
C.2.1 Tensor de tensiones	171
C.2.2 Ecuación de continuidad	171
C.2.3 Ecuación de Navier-Stokes	172

Introducción

El objetivo de este curso es, por un lado, profundizar los conocimientos de la mecánica de una partícula y de un sistema de partículas, presentando herramientas de estudio más poderosas que las vistas en Física General I, y, por otro lado, aprender los fundamentos de la *Elasticidad Lineal*, que estudia los cuerpos sólidos de determinado comportamiento, y de la *Mecánica de los Fluidos*.

Cuando se estudia un sistema con un gran número de partículas es conveniente hacer un tratamiento macroscópico y considerar al medio como continuo. Esto significa que en lugar de analizar el movimiento de cada partícula por separado, estudiaremos el comportamiento de “elementos de volumen” o “elementos de materia”, pequeñas porciones del medio continuo cuyas dimensiones son macroscópicamente infinitesimales, pero que son suficientemente grandes como para contener un gran número de partículas. Al decir que las dimensiones del elemento de materia son macroscópicamente infinitesimales, queremos decir que son mucho menores que otras dimensiones en juego, como por ejemplo, el tamaño del cuerpo en consideración, o longitudes características de variación de las magnitudes físicas como la densidad, temperatura, etc.

A grandes rasgos, desde el punto de vista de la mecánica, los medios continuos se pueden separar en dos tipos : *sólidos* y *fluidos*.

- **Sólidos:** en ellos la variación en el tiempo de las posiciones relativas de cualquier par de elementos cercanos puede ser sólo pequeña. Desde el punto de vista macroscópico, la distancia entre moléculas es lo suficientemente pequeña (del orden de 4×10^{-8} cm), como para que las fuerzas intermoleculares sean grandes, y además la forma en que se acomodan las moléculas en estructuras regulares muy estables.
- **Fluidos:** en ellos la presión relativa de dos elementos de materia que inicialmente están cerca puede variar fuertemente en el tiempo; son cuerpos fuertemente deformables. Los fluidos abarcan los líquidos y los gases; la diferencia más importante es su compresibilidad: los gases se comprimen mucho más fácilmente que los líquidos. Desde el punto de vista microscópico, en los líquidos la distancia entre moléculas es sólo levemente mayor que en los sólidos, pero sólo algunos grupos de moléculas están parcialmente ordenados en forma no permanente y el conjunto tiene una gran movilidad. En los gases, la distancia intermolecular es

mucho mayor, por lo que las fuerzas entre moléculas son muy pequeñas, salvo cuando dos partículas llegan a quedar por un instante cerca. A pesar de las diferencias entre líquidos y gases, las ecuaciones que gobiernan su movimiento son las mismas, las estudiaremos en mecánica de los fluidos.

Otra característica diferente entre gases, líquidos y sólidos es que el movimiento de agitación térmica de las moléculas tiene mucha mayor amplitud en los gases que en los líquidos, y en éstos es mucho mayor que en los sólidos.

Entre los sólidos, podemos hacer la siguiente clasificación: *sólidos rígidos* y *sólidos deformables*; y entre estos últimos tenemos los *elásticos* y los *inelásticos*.

- Sólidos rígidos: es una idealización en la que se considera que la distancia entre las partículas es constante en el tiempo. Esta suposición permite una gran simplificación y no es necesario hacer un tratamiento de medio continuo.
- Sólidos deformables: la posición relativa de los elementos de materia varía al aplicarse una fuerza al cuerpo.
- Sólidos elásticos: la deformación desaparece al anularse las fuerzas que la producían. Para fuerzas pequeñas, las deformaciones son proporcionales a las fuerzas aplicadas: este es el rango de la *elasticidad lineal*.
- Sólidos inelásticos: al anularse las fuerzas aplicadas, no desaparece toda la deformación sino que queda una deformación residual, llamada deformación plástica.

Los cuerpos sólidos pueden tener un rango de comportamiento elástico y, cuando las fuerzas crecen, volverse inelásticos. Además, según el problema que se esté estudiando, un sólido puede aproximarse como rígido o se lo debe tratar como deformable. Por ejemplo, cuando se analiza el movimiento de rotación de la Tierra, en primera aproximación, se la puede considerar como cuerpo rígido, pero si se quieren estudiar las ondas sísmicas, es esencial tratarla como cuerpo deformable.

Los *fluidos* pueden ser *ideales* (o no viscosos) y *reales*, según que se pueda o no despreciar la viscosidad. La viscosidad es un proceso de fricción interna entre elementos de fluido adyacentes cuando los mismos tienen velocidades diferentes.

La distinción entre sólidos y fluidos no es nítida, ya que hay sustancias, como por ejemplo ciertas soluciones concentradas de polímeros, que tienen comportamiento como sólidos o como fluidos según el tipo de fuerzas aplicadas.

Un resumen del contenido del curso es el siguiente:

- Capítulo I: se hará un repaso de la dinámica de una partícula y de un sistema de partículas en la formulación Newtoniana, que es la que han visto en Física General I. Se estudiarán los osciladores ya que son sistemas que aparecen con mucha frecuencia. Se analizará como se describen sistemas vinculados, introduciendo las coordenadas generalizadas. Se verá una nueva forma, distinta a la Newtoniana, de estudiar los sistemas mecánicos: la formulación Lagrangiana. Finalmente se considerarán sistemas de referencia no inerciales.

- Capítulo II: en este capítulo se verán temas de matemática que son necesarios para el desarrollo del curso. Se hará un repaso de matrices, se verán transformaciones de coordenadas y tensores cartesianos. Este último tema se utilizará al estudiar los cuerpos rígidos y, sobre todo, en el estudio de los cuerpos elásticos.
- Capítulo III: se verá como se describe la posición de un cuerpo rígido. Se definirá el tensor de inercia y se darán las leyes de movimiento del rígido. Se considerará el ejemplo del trompo simétrico libre.
- Capítulo IV: se verá como se describen las deformaciones y las tensiones en los sólidos deformables y la relación entre las mismas en el rango de la elasticidad lineal. Se estudiarán las ecuaciones de equilibrio y de movimiento de un cuerpo elástico isotrópico.
- Capítulo V: Primero se estudiarán las ondas en general y después se verá que en un medio elástico se pueden propagar dos tipos de ondas: *longitudinales* y *transversales*.
- Capítulo VI: se discutirán las descripciones Lagrangiana y Euleriana de los fluidos. En la descripción Euleriana se verán la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento para fluidos ideales o ecuación de Euler. Se verán problemas de hidrostática y conceptos de líneas de corriente y vorticidad, la ecuación de Bernoulli y los flujos potenciales.
- Capítulo VII: Para los fluidos reales se analizará el fenómeno de la viscosidad. Se verá la ecuación de Navier-Stokes, que es la ecuación de movimiento para los fluidos reales. Se discutirán el número de Reynolds y la capa límite.

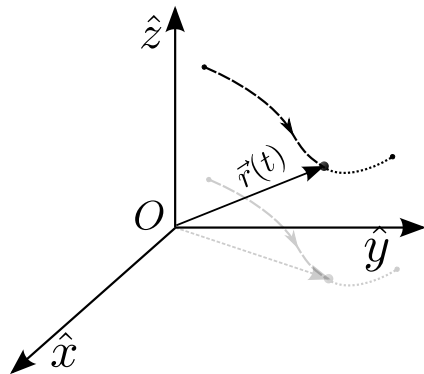
Capítulo I

Dinámica de una partícula y de sistemas de partículas

I.1. Partícula, vector posición, velocidad, aceleración, masa e impulso lineal

La mecánica estudia el movimiento de los cuerpos. En este curso veremos primero las leyes que gobiernan el movimiento de una partícula o de un sistema de partículas usando la formulación Newtoniana.

Llamaremos partícula a un cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas respecto a las otras dimensiones que están en juego. Un mismo cuerpo puede considerarse o no partícula según el problema que se esté estudiando; la Tierra puede tratarse como una partícula si se analiza su movimiento de traslación alrededor del sol, pero no cuando se estudia su rotación o las ondas sísmicas.



La posición de la partícula se determina con respecto a un sistema de referencia de origen O por medio del vector posición \vec{r} . Al dar la dependencia del vector posición con el tiempo, $\vec{r}(t)$, damos la trayectoria de la partícula. La velocidad de la partícula

está definida por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (\text{I.1})$$

Por su definición, la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

Definimos el impulso lineal (llamado también cantidad de movimiento, ímpetu, momentum) a la magnitud

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{I.2})$$

donde la masa m es una característica de la partícula; para $|v| \ll c$, velocidad de la luz, podemos considerarla independiente de su estado de movimiento.

La aceleración \vec{a} queda definida por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (\text{I.3})$$

Introduzcamos la siguiente notación: a una derivada total con respecto al tiempo la indicaremos con un punto encima de la función que estamos derivando. O sea

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

I.2. Leyes de Newton – Sistemas inerciales

Las leyes fundamentales de la mecánica, en la formulación Newtoniana, están dadas por las leyes de Newton, que podemos enunciar de la siguiente manera.

- 1ª Ley: Una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza, o sea que no interactúa con ninguna otra, permanece en reposo o se mueve con velocidad constante a lo largo de una línea recta.

$$\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{cte}$$

- 2ª Ley: La variación temporal del impulso lineal de una partícula es igual a la fuerza que actúa sobre ella.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (\text{I.4})$$

(Ley de inercia)

- 3ª Ley: Las fuerzas ejercidas por dos partículas entre sí son iguales en magnitud y de sentido opuesto.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

(Ley de acción y reacción)

La tercera ley no siempre es válida, habiendo fuerzas que no la cumplen, como, por ejemplo, las interacciones electromagnéticas entre cargas aceleradas.

La primera y segunda ley no son válidas en cualquier sistema de referencia sino en aquellos llamados *inerciales*. Un sistema es inercial si cualquier partícula libre de fuerzas, o sea que no interactúa con otros cuerpos, se mueve respecto a ese sistema de referencia con velocidad constante a lo largo de una línea recta, o sea, si se cumple la primera ley.

Si un sistema es inercial, cualquiera que se mueva con respecto a él, con velocidad constante, también lo es. Para demostrarlo supongamos que Σ es un sistema inercial y que Σ' se mueve respecto a Σ con una velocidad constante \vec{v}_0 . Sean t el tiempo y \vec{r} la posición de una partícula, medidos por un observador en Σ , y t' y \vec{r}' el tiempo y el vector posición de la misma partícula medidos por un observador en Σ' . Suponiendo que $|\vec{v}_0| \ll c$, podemos considerar al tiempo como absoluto, o sea

$$t = t' \quad (\text{I.5})$$

Si los orígenes de los sistemas coinciden a $t = 0$ la relación entre \vec{r} y \vec{r}' viene dada por

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \quad (\text{I.6})$$

Las relaciones (I.5) y (I.6) constituyen las transformaciones de Galileo. Si no se cumple que v_0 sea mucho menor que c , el tiempo no es más absoluto y las transformaciones válidas son las de Lorentz. Aquí consideraremos el límite no relativista ($v_0 \ll c$).

Consideremos una partícula que no interactúa con ninguna otra. En el sistema Σ , al ser éste inercial, vale la 1ª Ley, por lo que la velocidad de la partícula, \vec{v} , será constante. Veamos que sucede en Σ' , teniendo en cuenta (I.5) y (I.6)

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{v}_0$$

luego la velocidad de la partícula en Σ' también es constante y se cumple la 1ª Ley. Por lo tanto, Σ' también es inercial.

La segunda ley de Newton, si la masa m es constante, se expresa en forma vectorial unívocamente

$$\vec{F} = m \vec{\ddot{r}}$$

En cambio, la expresión en componentes depende del sistema de coordenadas que se emplee. La forma más simple es en coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$F_x = m\ddot{x} \quad F_y = m\ddot{y} \quad F_z = m\ddot{z}$$

Si se utilizan otras coordenadas (por ejemplo: cilíndricas o esféricas), la 2ª Ley escrita en componentes tiene expresiones más complicadas. Se puede mostrar que en

cilíndricas (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} F_r &= m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= m (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \\ F_z &= m\ddot{z} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Como veremos más adelante, en la formulación Lagrangiana las ecuaciones de movimiento se pueden expresar en una forma independiente del sistema de coordenadas.

I.3. Trabajo, energía cinética, fuerzas conservativas, energía potencial y energía mecánica

Definiremos los conceptos de trabajo y energía cinética y veremos, usando la segunda ley de Newton, qué relaciones existen entre ellos. Posteriormente, estudiaremos un tipo de fuerzas, llamadas conservativas, e introduciremos los conceptos de energía potencial y energía mecánica. La información que se obtiene de estas magnitudes es muy útil para analizar el movimiento de la partícula y da mucha información sobre el mismo, aunque no se logren integrar totalmente las ecuaciones de movimiento para obtener $\vec{r}(t)$.

Consideremos una partícula que se mueve en una trayectoria entre dos posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , y que sobre ella actúa una fuerza \vec{F} . Se define el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula entre los puntos 1 y 2 como la integral curvilínea:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.8})$$

En forma similar, el trabajo diferencial dW es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.9})$$

y la potencia, o trabajo por unidad de tiempo:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{I.10})$$

El trabajo se puede calcular para cualquiera de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Pero supongamos ahora que \vec{F} es la fuerza total aplicada a la partícula. De la segunda Ley de Newton, suponiendo m constante, resulta

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2}m \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv^2}{dt} dt = T_2 - T_1 \quad (\text{I.11})$$

donde

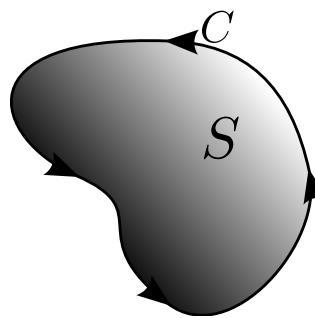
$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{I.11})$$

es la energía cinética de la partícula. Luego, el trabajo realizado por la fuerza total aplicada a una partícula es igual a la diferencia entre la energía cinética final y la inicial.

Las fuerzas son, en general, función de la posición, de la velocidad y del tiempo. Cuando calculamos el trabajo

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot d\vec{r}$$

al evaluar la integral, tenemos que tener en cuenta con que velocidad y en que instante de tiempo pasa la partícula por un determinado punto.



Si \vec{F} es sólo función de la posición, $\vec{F}(\vec{r})$, el trabajo podrá ser función del camino pero es independiente de la velocidad con la que lo recorra y el tiempo con que se lo haga. Si el trabajo realizado por una fuerza resulta, además, independiente del camino y sólo función de los extremos, se dice que la fuerza es conservativa. Otra forma de poner la condición es

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I.12})$$

para todo camino cerrado C. Usando el Teorema de Stokes, resulta que una fuerza será conservativa si

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = 0$$

para cualquier superficie abierta S. Como la superficie abierta es cualquiera, esto implica

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I.13})$$

o sea, toda fuerza que dependa sólo de \vec{r} y conservativa es irrotacional. A la inversa, toda fuerza que depende sólo de la posición, y es irrotacional, es conservativa.

Como para toda función escalar $f(\vec{r})$ se cumple que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$, podemos derivar una fuerza conservativa de un escalar $U(\vec{r})$ que recibe el nombre de energía potencial, a través de la relación

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (\text{I.14})$$

Antes de obtener la expresión de $U(\vec{r})$ a partir de \vec{F} , calculemos el trabajo entre los puntos (1) y (2), debido a una fuerza conservativa

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}$$

usando la propiedad matemática

$$\int_1^2 \vec{\nabla}g(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = g(\vec{r}_2) - g(\vec{r}_1) \quad (\text{I.15})$$

se llega a

$$W_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad (\text{I.16})$$

El trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos es igual a la diferencia entre la energía potencial inicial y la final.

Este resultado también se puede obtener sin utilizar la propiedad (I.15), eligiendo adecuadamente el camino, ya que para una fuerza conservativa el trabajo no depende del camino. Usando el camino

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_2, y_1, z_1) \rightarrow (x_2, y_2, z_1) \rightarrow (x_2, y_2, z_2) = \vec{r}_2$$

tenemos

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_1, z_1)} F_x dx + \int_{(x_2, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_1)} F_y dy + \int_{(x_2, y_2, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} F_z dz \\ &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_1, z_1)} -\frac{\partial U}{\partial x} dx + \int_{(x_2, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_1)} -\frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{(x_2, y_2, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -\frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= - \left[U(x_2, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1) + U(x_2, y_2, z_1) - \right. \\ &\quad \left. - U(x_2, y_1, z_1) + U(x_2, y_2, z_2) - U(x_2, y_2, z_1) \right] \\ &= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) \\ &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \end{aligned}$$

Dado que una constante aditiva $U(\vec{r})$ no cambia la relación $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$, podemos elegir arbitrariamente el cero, \vec{r}_0 , de la energía potencial

$$U(\vec{r}_0) = 0$$

De (I.16) podemos poner

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r} \quad (\text{I.17})$$

Por lo tanto la energía potencial en el punto \vec{r} es igual al trabajo realizado por la fuerza F desde el punto \vec{r} al punto elegido como cero del potencial.

Si la fuerza total aplicada a la partícula es derivable de una energía potencial $U(\vec{r})$, el trabajo es, por un lado, igual a la diferencia entre energía cinética final e inicial y, por otro lado, igual a la diferencia entre energía potencial inicial y final (I.11 y I.16).

$$W_{12} = T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

Luego, si todas las fuerzas son conservativas, la magnitud $E = T + U$, llamada energía mecánica, se conserva.

Hay ocasiones en que se puede poner

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t) \quad (\text{I.18})$$

con una energía potencial que depende explícitamente del tiempo. Pero en este caso, la fuerza no es conservativa, pues no se puede poner $W_{12} = U_1 - U_2$, ya que para evaluar el trabajo de la fuerza hay que considerarla en el instante en que la partícula pasa por un dado punto de la trayectoria, y no a t fijo.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}, t(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \vec{\nabla}U(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \neq U_1 - U_2$$

aquí se tuvo en cuenta que el operador gradiente opera sobre la dependencia explícita en \vec{r} , y no sobre la que aparece a través de t .

Calcularemos la variación de energía mecánica $E = T + U$, suponiendo que la fuerza en (I.18) sea la fuerza total.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}, t) \right) \\ &= m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}U + \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{F} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}U + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Supongamos ahora que además de una fuerza conservativa derivable de una energía potencial $U(\vec{r})$, tenemos otra fuerza \vec{F}' no conservativa

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \vec{F}'$$

Llamando W_{12} al trabajo total, y W'_{12} al trabajo realizado por la fuerza no conservativa, tenemos

$$W_{12} = U_1 - U_2 + W'_{12}$$

Como $W_{12} = T_2 - T_1$, resulta

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W'_{12}$$

o sea

$$E_2 - E_1 = W'_{12} \quad (\text{I.20})$$

la variación de energía mecánica es igual al trabajo de la fuerza no conservativa.

De la misma forma se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = P' = \vec{F}' \cdot \vec{v} \quad (\text{I.21})$$

Si \vec{F}' es una fuerza de roce, es opuesta a la velocidad, en ese caso

$$\vec{F}' \cdot \vec{v} < 0 \implies \frac{dE}{dt} < 0$$

la energía mecánica disminuye.

I.4. Integral de movimiento

Durante el movimiento de una partícula hay seis cantidades que varían con el tiempo: tres de \vec{r} y tres de \vec{v} . Pero pueden existir funciones de estas magnitudes que permanecen constantes durante el movimiento, y que dependen solamente de las condiciones iniciales. A una función

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = cte$$

se la llama integral de movimiento. La designación proviene de las ecuaciones diferenciales de 2º orden: una relación entre la variable y la derivada primera se llama primera integral, y se obtiene, cuando existe, de una primera integración de la ecuación. En el caso de la mecánica, la ecuación de segundo orden es la ecuación de movimiento.

Ejemplos de integrales de movimiento son el impulso lineal para una partícula libre o la energía mecánica para una partícula en un campo de fuerzas conservativo.

Más adelante veremos otras posibles integrales de movimiento para una partícula. La generalización del concepto de integral de movimiento para varias partículas es inmediata.

I.5. Impulso angular – Fuerzas centrales

Otra de las magnitudes que ocupa un lugar muy importante en la mecánica es el impulso angular (también llamado momento cinético o momento angular). Definimos el impulso angular de una partícula respecto a un punto O , \vec{L}_o , como

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p} \quad (I.22)$$

siendo \vec{p} el impulso lineal y \vec{r} el vector posición medido desde O ; tenemos entonces que el impulso angular depende del origen elegido.

Calculemos la variación temporal de \vec{L}_o en un sistema inercial

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde hemos usado que \vec{p} y $\frac{d\vec{r}}{dt}$ son paralelos y la segunda ley de Newton. Definiendo el momento de \vec{F} respecto a O , \vec{N}_o , como

$$\vec{N}_o = \vec{r} \times \vec{F} \quad (I.23)$$

resulta

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{N}_o \quad (I.24)$$

la variación temporal del impulso angular de una partícula respecto a un punto es igual al momento de todas las fuerzas aplicadas, respecto del mismo punto.

El impulso angular se conserva si el momento \vec{N} se anula; en este caso \vec{L} es una integral de movimiento. Obsérvese que el que se conserve el impulso angular respecto a un dado punto, no implica en general su conservación si está calculado respecto de otro punto. Además del caso trivial $\vec{F} = 0$, \vec{N} se anula si \vec{F} es paralelo a \vec{r} en todo punto. A las fuerzas que son paralelas al radio vector se las llama centrales. Si la fuerza es central, el movimiento es plano ya que $\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$ es, en este caso, un vector constante perpendicular a \vec{r} ; por lo tanto \vec{r} estará contenido en el plano perpendicular a \vec{L}_o que pasa por O .

Un lugar especial entre las fuerzas centrales lo ocupan aquellas que, además, son conservativas, o sea

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Veremos que en este caso la energía potencial depende sólo del módulo del vector posición, $|\vec{r}|$. Eligiendo coordenadas esféricas r, θ, ϕ , se tiene que $|\vec{r}| = r$ y de la expresión del gradiente en estas coordenadas

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \check{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \check{\theta} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \check{\phi}$$

por otro lado, por ser \vec{F} una fuerza central

$$\vec{F} = F_r \check{r}$$

Luego

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

con lo que la energía potencial U depende sólo de r

$$\vec{F} = - \frac{dU(r)}{dr} \check{r} = F_r(r) \check{r} \quad (I.25)$$

El módulo de una fuerza central conservativa, depende sólo de la distancia al centro de fuerzas.

I.6. Osciladores lineales

Muchos sistemas mecánicos se comportan, por lo menos aproximadamente, como osciladores. Por tal motivo los estudiaremos con algo de detalle. Tendremos un oscilador cuando, al apartarse de una posición de equilibrio \vec{r}_0 , se ejerce sobre la partícula una fuerza que tiende a restituirla a la posición de equilibrio; como consecuencia la partícula oscila alrededor del punto de equilibrio. Cuando la fuerza restitutiva es linealmente proporcional al apartamiento ($\vec{r} - \vec{r}_0$), se trata de un oscilador lineal.

$$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (I.26)$$

Esta es una fuerza central con centro en \vec{r}_0 y que además es conservativa, ya que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. La energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}k|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 \quad (I.27)$$

Si se elige el origen de coordenadas en el punto de equilibrio, usando coordenadas esféricas r, θ, φ , la energía potencial dependerá sólo de r

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad (I.28)$$

El movimiento será en un plano por ser una fuerza central y, en general, habrá oscilaciones en dos direcciones independientes.

Una situación más general se da cuando las componentes de la fuerza restitutiva son proporcionales a las correspondientes componentes del apartamiento del punto de equilibrio pero con constantes de proporcionalidad distintas

$$F_x = -k_x(x - x_0)$$

$$F_y = -k_y(y - y_0)$$

$$F_z = -k_z(z - z_0)$$

Salvo que $k_x = k_y = k_z$ la fuerza no es central, aunque sí es conservativa

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_x(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}k_y(y - y_0)^2 + \frac{1}{2}k_z(z - z_0)^2$$

El movimiento será combinación de oscilaciones en las tres direcciones.

I.6.1. Osciladores lineales unidimensionales

Analizaremos el movimiento unidimensional de osciladores en diferentes situaciones.

Oscilador lineal libre

Si la única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza restitutiva, la ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ \text{ó} \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \end{aligned} \tag{I.29}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes. Su solución es una combinación de $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, con ω a determinar.

En lugar de resolver la ecuación (I.29) buscaremos las soluciones de la ecuación compleja

$$m\ddot{z} + kz = 0 \tag{I.30}$$

siendo $x = \text{Re}(z)$. Como los coeficientes de la ecuación son reales, si $z(t)$ es solución de (I.30) entonces $\text{Re}(z(t))$ es solución de (I.29).

Proponemos

$$z(t) = Ae^{i\omega t} \tag{I.31}$$

con A una constante compleja y ω a determinar. Para que (I.31) sea solución, debe satisfacer (I.30):

$$m(-\omega^2)Ae^{i\omega t} + kAe^{i\omega t} = 0$$

o sea

$$(-m\omega^2 + k)Ae^{i\omega t} = 0$$

Luego, ω debe ser solución de

$$-m\omega^2 + k = 0$$

$$\omega = \pm w_0 \quad \text{con} \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{I.32}$$

La solución general de la ecuación compleja (I.30) es entonces

$$z(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (\text{I.33})$$

Si tomamos la parte real del primer término, poniendo

$$A = |A| e^{i\alpha}$$

tendremos que una solución del oscilador lineal libre (I.29) es

$$x = \text{Re} \left(|A| e^{i(\omega_0 t + \alpha)} \right) = |A| \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (\text{I.34})$$

Si tomamos la parte real del segundo término de (I.33) obtenemos una función del mismo tipo que (I.34). Dado que (I.34) ya posee las dos constantes arbitrarias, $|A|$ y α , (I.34) es la solución general del oscilador lineal libre.

Oscilador lineal amortiguado

Consideremos el caso en que el oscilador está amortiguado con una fuerza de amortiguamiento lineal, o sea

$$F_{\text{amort}} = -m\gamma v = -m\gamma \dot{x}$$

La ecuación de movimiento resulta

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{I.35})$$

y la correspondiente ecuación compleja

$$m\ddot{z} + m\gamma\dot{z} + kz = 0 \quad (\text{I.36})$$

Proponiendo para esta última

$$z = Ae^{i\omega t}$$

y reemplazando en (I.36):

$$m \left(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 \right) Ae^{i\omega t} = 0 \quad (\text{I.37})$$

donde se usó que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Luego, para que $Ae^{i\omega t}$ sea solución de (I.36), ω debe ser raíz de

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

o sea

$$\omega = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (\text{I.38})$$

Habrá distinto tipo de soluciones según que el radicando sea positivo, nulo o negativo.

a) Amortiguamiento menor que el crítico: $\gamma < 2\omega_0$

En este caso $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ es real. La solución general compleja es

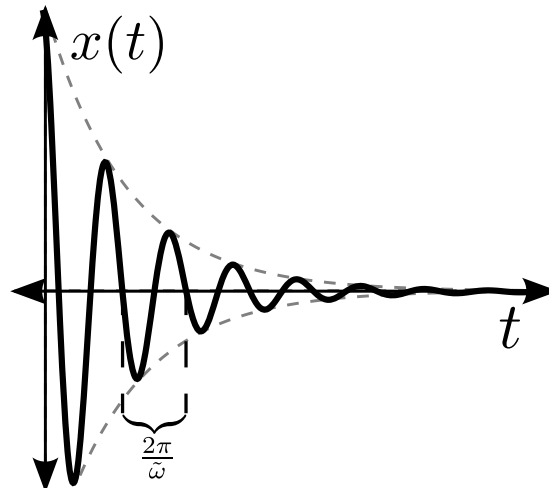
$$z(t) = A_1 e^{-\gamma t/2} e^{i\omega t} + A_2 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega t}$$

donde A_1 y A_2 son constantes complejas arbitrarias.

Por lo tanto la solución general del oscilador amortiguado, con amortiguamiento menor que el crítico es

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \alpha) \quad (\text{I.39})$$

donde A y α son reales. El movimiento es una oscilación cuya amplitud disminuye exponencialmente

b) Amortiguamiento crítico: $\gamma = 2\omega_0$

En este caso el radicando en (I.38) es nulo y hay un solo valor de ω , $\omega = i\frac{\gamma}{2}$, y se obtiene una sola solución de la forma propuesta

$$z(t) = A e^{-\gamma t/2}$$

Para obtener la otra solución de la ecuación (I.36) proponemos

$$z(t) = B t e^{-\gamma t/2}$$

Derivando

$$\dot{z}(t) = B \left(1 - \frac{\gamma}{2} t\right) e^{-\gamma t/2}$$

$$\ddot{z}(t) = B \left(-\gamma + \frac{\gamma^2}{4} t\right) e^{-\gamma t/2}$$

Si reemplazamos en la ecuación diferencial (I.36) vemos que esta se satisface si $\gamma = 2\omega_0$

$$m \left(\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z \right) = mB \left(-\gamma + \frac{\gamma^2}{4}t + \gamma - \frac{\gamma^2}{2}t + \omega_0^2 t \right) e^{-\gamma t/2} = 0$$

Luego la solución general compleja es

$$z(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2}$$

con A y B complejos. La solución general del oscilador amortiguado con amortiguamiento crítico es entonces

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2} \quad (\text{I.40})$$

con A y B constantes reales.

El movimiento no es oscilatorio, y si bien puede llegar a aumentar su amplitud para tiempos cortos, a tiempos largos decae exponencialmente como $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$.

c) Amortiguamiento mayor que el crítico: $\gamma > 2\omega_0$

El radicando en (I.38) es imaginario

$$\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = i\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

con lo que la solución general del oscilador amortiguado con amortiguamiento mayor al crítico es

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)t} \quad (\text{I.41})$$

con A_1 y A_2 reales. Si bien uno de los términos decae más rápidamente que cuando el amortiguamiento es crítico, el otro término decae más lentamente. Luego, salvo que por condiciones iniciales A_2 sea nulo, el movimiento perdurará más tiempo que en el caso crítico.

Oscilador forzado amortiguado

Consideraremos nuevamente amortiguamiento lineal, y una fuerza externa oscilatoria con amplitud F_0 y una frecuencia ω_f

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

La ecuación de movimiento es entonces

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_f t) \quad (\text{I.42})$$

Esta ecuación diferencial es la parte real de

$$m\ddot{z} + m\gamma\dot{z} + m\omega_0^2 z = F_0 e^{i\omega_f t} \quad (\text{I.43})$$

Al ser una ecuación lineal inhomogénea, la solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, y una solución particular de la ecuación inhomogénea.

$$z(t) = z_{\text{homog}}(t) + z_{\text{part}}(t)$$

De la misma forma, la solución general de (I.42) será

$$x(t) = x_{\text{homog}}(t) + x_{\text{part}}(t) \quad (\text{I.44})$$

donde $x_{\text{part}}(t) = \text{Re}(z_{\text{part}})$

Las soluciones de la ecuación homogénea fueron analizadas en la sección anterior, para amortiguamiento menor, igual o mayor que el crítico. Nos limitaremos ahora a buscar una solución particular.

Proponemos

$$z_{\text{part}}(t) = A' e^{i\omega_f t}$$

donde la frecuencia angular es la misma que la de la fuerza externa. Derivando y reemplazando en la ecuación (I.43) obtenemos una condición para A'

$$A' = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega_f^2 + i\gamma\omega_f)} \quad (\text{I.45})$$

Definimos un nuevo coeficiente C tal que

$$A' = CF_0 \quad (\text{I.46})$$

Poniendo

$$C = |C| e^{i\beta} \quad (\text{I.47})$$

de (I.45) resulta

$$|C| = \frac{1}{m \left[(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_f^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.48})$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{\gamma \omega_f}{\omega_f^2 - \omega_0^2} \right) \quad (\text{I.49})$$

Reemplazando (I.46) (I.47) en z_{part} y tomando la parte real se obtiene una solución particular del oscilador forzado amortiguado

$$x_{\text{part}}(t) = |C| F_0 \cos(\omega_f t + \beta) \quad (\text{I.50})$$

Las constantes arbitrarias, que se determinan con las condiciones iniciales, están en la solución general de la ecuación homogénea. Como x_{homog} decae exponencialmente con t , a tiempos grandes la solución que perdura es la particular (I.50).

La constante $|C|$, que da la respuesta del oscilador a la fuerza externa, depende de la frecuencia de ésta. El máximo valor se da para

$$\omega_f = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y vale

$$|C|_{\text{max}} = \frac{1}{m\gamma \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Cuando el amortiguamiento es muy pequeño, el máximo se da cuando la frecuencia ω , frecuencia de la fuerza externa, es igual a ω_0 , frecuencia propia del oscilador; además la amplitud de la solución particular se hace muy grande. Este fenómeno se conoce como resonancia.

I.7. Movimiento unidimensional conservativo – Integración por cuadratura

Todo movimiento en un campo de fuerzas que tenga no nula solamente la componente en una dirección y que dependa únicamente de la coordenada correspondiente a esa dirección, o sea

$$\vec{F} = F_x(x)\check{x}$$

es conservativo, ya que $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x) = 0$. Por lo tanto se puede poner

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla}U(x)$$

y la energía mecánica de un movimiento unidimensional, en la dirección x , en ese campo será

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad (\text{I.51})$$

A partir de esta expresión podemos obtener la ecuación de la trayectoria, $x(t)$, al menos implícitamente.

De (I.51) podemos despejar la velocidad

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \quad (\text{I.52})$$

donde la raíz cuadrada puede ser positiva o negativa. Despejando dt

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}}$$

el segundo miembro es función sólo de x , por lo que podemos integrar

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (\text{I.53})$$

o, si $x_0 = x(t_0)$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (\text{I.54})$$

En (I.53) y (I.54) hay que analizar que signo le corresponde a la raíz, o sea, a la velocidad.

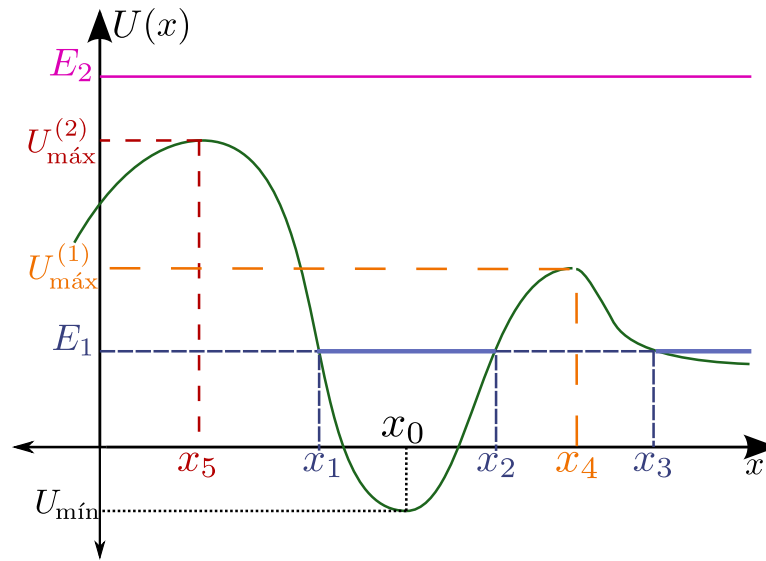
Vemos entonces que para un movimiento unidimensional conservativo, el hecho de que la energía sea una integral de movimiento proporciona un método para obtener $t = t(x)$ o, implícitamente, $x = x(t)$. Como la solución se puede expresar como una integral definida sobre la variable x , se dice que el problema se puede resolver por cuadratura (se llama cuadratura al área bajo una curva).

Aún sin resolver la integral, se pueden sacar conclusiones sobre el tipo de trayectorias para una dada energía potencial $U(x)$. Como la velocidad es real y $\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$, para un valor dado de la energía E los valores de la coordenada x accesibles deben ser tales que

$$E \geq U(x)$$

En particular el menor valor posible de E es el valor mínimo absoluto de la función $U(x)$ y, en ese caso, la partícula sólo puede estar en reposo en el punto del mínimo. Los puntos en que $E = U(x)$ que no corresponden a un mínimo o a un máximo se llaman puntos de retorno; en ellos la velocidad se hace nula y cambia de signo, cambiando el sentido del movimiento de la partícula. Analizando si para una determinada energía hay puntos de retorno y cuales son los intervalos en que $E \geq U(x)$ se puede establecer si el movimiento es acotado y cuando no lo es. Si $E > U(x)$ entre dos puntos de retorno la partícula se mueve hacia uno de ellos, cuando lo alcanza se detiene, y cambia de sentido hacia el otro punto de retorno, repitiéndose el comportamiento; el movimiento es acotado y periódico, pues que cada vez que pasa por un punto en un sentido la velocidad es la misma, y por tanto el tiempo en que va de un punto de retorno a otro es siempre igual. Si $E > U(x)$ entre un punto de retorno e infinito el movimiento es infinito, acotado a izquierda o a la derecha, según el caso. Si $E > U(x)$ para todo x el movimiento es infinito no acotado, y la partícula se mueve siempre en el mismo sentido.

Por ejemplo para una energía potencial como la del gráfico



Si $U_{\text{mín}} < E < U_{\text{máx}}^{(1)}$, como por ejemplo E_1 , hay 3 puntos de retorno, x_1, x_2, x_3 . Según las condiciones iniciales, el movimiento será acotado y periódico entre los puntos de retorno x_1 y x_2 , $x_1 \leq x \leq x_2$, o será infinito, acotado a la izquierda por x_3 : $x \geq x_3$. Si la energía es mayor que $U_{\text{máx}}^{(2)}$ el movimiento es infinito, no acotado, y se mantiene el sentido del movimiento. Los puntos x_0, x_4 y x_5 son puntos de equilibrio. Analizando las fuerzas que aparecen si se aparta un poco la partícula del equilibrio se ve que x_0 , que corresponde a un mínimo de energía potencial, es un punto de equilibrio estable, ya que la partícula si se la aparta tiende a volver al punto de equilibrio, mientras que x_4 y x_5 , que corresponden a máximos de energía potencial, son puntos de equilibrio inestables, ya que la partícula se alejará del punto de equilibrio.

Para el caso acotado, el período es

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \quad (\text{I.55})$$

Analicemos el movimiento alrededor de un extremo, x_e . Desarrollamos $U(x)$ alrededor de x_e , suponiendo que el apartamiento es pequeño:

$$U(x) = U(x_e) + \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} (x - x_e)^2 + \dots$$

Por ser un extremo, $\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_e} = 0$; luego, si $\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} \neq 0$,

$$U(x) = U(x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} (x - x_e)^2 + \dots$$

La ecuación de movimiento para pequeños desplazamientos la podemos aproximar por

$$m\ddot{x} = - \frac{dU}{dx} \approx - \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} (x - x_e)$$

Llamando ξ al apartamiento $x - x_e$, podemos poner

$$m\ddot{\xi} + \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} \xi = 0 \quad (\text{I.56})$$

Si el extremo es un mínimo, $\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} > 0$ la ecuación (I.56) es la de un oscilador libre con (ver (I.29))

$$k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_e} \quad (\text{I.57})$$

Se tiene entonces que para pequeños apartamientos la partícula oscila alrededor del mínimo con frecuencia $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Esto está de acuerdo con que el equilibrio es estable.

Si el extremo es un máximo, $\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_e} < 0$, definimos

$$\chi = - \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_e} > 0 \quad (\text{I.58})$$

la ecuación (I.56) queda

$$m\ddot{\xi} - \chi\xi = 0$$

cuya solución es

$$\xi = A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t} \quad (\text{I.59})$$

donde

$$\beta = \sqrt{\frac{\chi}{m}} \quad (\text{I.60})$$

Como la solución (I.59) contiene una exponencial creciente, la partícula se aleja de la posición de equilibrio: el equilibrio es inestable. La solución (I.59) es válida sólo para t pequeños, mientras el desplazamiento ξ sea pequeño.

I.8. Sistemas de Partículas

Consideremos un sistema de partículas constituido por N partículas cuyas posiciones están dadas por los vectores \vec{r}_α , $\alpha = 1, \dots, N$

Para cada partícula podemos aplicar la segunda ley de Newton:

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha \quad (\text{I.61})$$

donde \vec{F}_α es la fuerza total aplicada a la partícula α . Esta será la suma de una fuerza interna debido a la interacción con las demás partículas del sistema, y una fuerza externa debida a interacciones con cuerpos que no pertenecen al sistema considerado

$$\vec{F}_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} + \vec{F}_\alpha^{(\text{ext})} \quad (\text{I.62})$$

Calculemos la variación del impulso lineal total del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{p}_\alpha \quad (\text{I.63})$$

Usando (I.61) y (I.62) tenemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^{(\text{ext})}$$

Analicemos la contribución de las fuerzas internas, suponiendo que se cumple la 3ª Ley de Newton,

$$\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta};$$

separando la doble sumatoria en dos partes, e intercambiando índices en una de ellas se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha > \beta}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N \vec{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N (\vec{F}_{\beta\alpha} + \vec{F}_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned}$$

Luego, cuando se cumple la 3ª Ley de Newton, la variación del impulso lineal total depende sólo de las fuerzas externas.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha^{(\text{ext})} \quad (\text{I.64})$$

Si el sistema es cerrado, o sea que no interactúa con el exterior, $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$, y el impulso lineal total se conserva: $\vec{P} = \text{cte}$.

Se define la posición del Centro de Masa, CM , de un sistema de partículas, al vector

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{M}, \quad \text{donde } M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \text{ es la masa total del sistema.} \quad (\text{I.65})$$

Si las masas son constantes

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (\text{I.66})$$

Como $\frac{d\vec{R}}{dt}$ es la velocidad del centro de masas, \vec{V}_{CM} , se tiene

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} \quad (\text{I.67})$$

Además

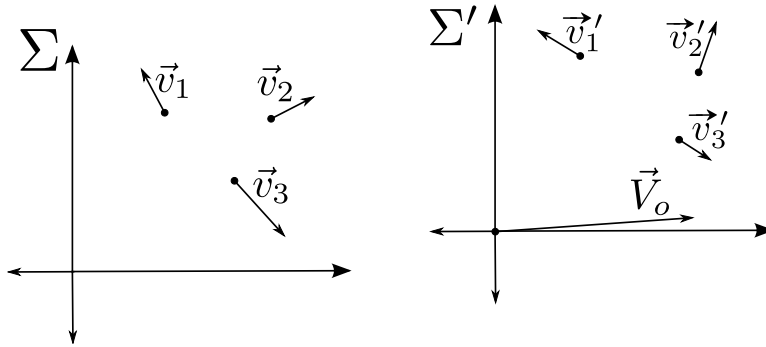
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \quad (\text{I.68})$$

o sea

$$M \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{(\text{ext})}$$

la aceleración del Centro de Masa depende, si se cumple la 3ª Ley, solamente de las fuerzas externas.

Veamos como se trasforma \vec{P} ante cambios en el sistema de referencia. Sea Σ' un sistema de referencia que se mueve con respecto al Σ con velocidad constante \vec{V}_0



Como $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_0$ entonces

$$\begin{aligned} \vec{P}' &= \sum_{\alpha} \vec{p}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} - \vec{V}_0) = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} - \vec{V}_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha} = \vec{P} - M\vec{V}_0 \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

Si el sistema de partículas es cerrado, $\vec{P} = \text{constante}$ y siempre se puede encontrar un sistema inercial en el que el impulso lineal sea nulo. Llamaremos sistema centro de masas (SCM) a ese sistema de referencia.

El impulso angular, respecto al origen, del sistema de partículas es la suma del impulso angular de cada partícula

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \quad (\text{I.70})$$

Calculemos su variación temporal

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(\text{ext})} + \sum_{\alpha} \sum_{\alpha \neq \beta} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\beta\alpha}$$

donde hemos usado (I.62). Veamos si podemos anular la contribución de las fuerzas internas; dividiendo la sumatoria sobre β en dos, y después intercambiando los índices en uno de los términos tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\beta\alpha} &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta < \alpha}} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta > \alpha}} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\beta\alpha} = \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta < \alpha}} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\beta\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta < \alpha}} \vec{r}_{\beta} \times \vec{F}_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta < \alpha}} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times \vec{F}_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

aquí hemos supuesto que se cumple la 3ª Ley. Si las fuerzas de interacción entre las partículas del sistema son además fuerzas centrales, o sea

$$\vec{F}_{\beta\alpha} \underbrace{\parallel}_{\text{paralelo}} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta})$$

la contribución a la variación del impulso angular total no depende de las fuerzas internas:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{(\text{ext})} = \vec{N}^{(\text{ext})} \quad (\text{I.71})$$

Igual que para una partícula, el impulso angular de un sistema depende del origen respecto al cual se calcula; si \vec{L}_O y \vec{L}_{CM} son los impulsos del mismo sistema de partículas respecto a O y respecto al centro de masa CM , se puede ver que

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P} \quad (\text{I.72})$$

I.8.1. Trabajo

Veamos a que es igual el trabajo de todas las fuerzas actuantes en el sistema, entre dos posiciones 1 y 2, dadas por $\vec{r}_\alpha^{(1)}$ y $\vec{r}_\alpha^{(2)}$, $\alpha = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_\alpha \int_1^2 \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \int_1^2 \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \cdot \vec{v}_\alpha dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \int_1^2 \frac{dv_\alpha^2}{dt} dt = T_2 - T_1 \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

donde la energía cinética T es la suma de las energías cinéticas de cada partícula

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2$$

A su vez el trabajo lo podemos separar en trabajo de las fuerzas externas y trabajo de las fuerzas internas

$$W_{12} = W_{12}^{(\text{ext})} + W_{12}^{(\text{int})}$$

Si las fuerzas externas son conservativas

$$\vec{F}_\alpha^{(\text{ext})} = -\vec{\nabla}_\alpha U_\alpha(\vec{r}_\alpha)$$

donde en $\vec{\nabla}_\alpha$ las derivadas se realizan respecto a las coordenadas de la partícula α . En este caso

$$W_{12}^{(\text{ext})} = - \sum_\alpha \int_1^2 \vec{\nabla}_\alpha U_\alpha(\vec{r}_\alpha) \cdot d\vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \left(U_\alpha^{(1)} - U_\alpha^{(2)} \right) \quad (\text{I.74})$$

con $U_\alpha^{(i)} = U_\alpha(\vec{r}_\alpha(t_i))$

Si las fuerzas de interacción entre partículas cumplen la 3ª Ley y son conservativas

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{\nabla}_\beta U_{\alpha\beta}(\vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha)$$

donde la función potencial $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$, depende sólo de la posición relativa de las partículas α y β . Se puede mostrar que

$$W_{12}^{(\text{int})} = \sum_\alpha \sum_{\beta < \alpha} \left(U_{\alpha\beta}^{(1)} - U_{\alpha\beta}^{(2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \beta \neq \alpha}} \left(U_{\alpha\beta}^{(1)} - U_{\alpha\beta}^{(2)} \right) \quad (\text{I.75})$$

o sea que la energía de interacción entre dos partículas se cuenta una sola vez.

Si todas las fuerzas, tanto externas como de interacción son conservativas

$$W_{12} = U^{(1)} - U^{(2)} \quad (\text{I.76})$$

con

$$U = \sum_{\alpha=1}^N U_{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \beta < \alpha}} U_{\alpha\beta}$$

y se conserva la energía mecánica E (I.73 y I.76)

$$E = T + U$$

I.8.2. Potenciales Generalizados

Hay problemas físicos en los que la fuerza se puede derivar de un escalar que depende, además de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo a través de la relación

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\alpha} = & -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{\alpha}} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) \\ & + \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}_{\alpha}} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) \end{aligned}$$

En este caso $U(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$ se llama potencial generalizado. Un ejemplo es el de una partícula cargada en un campo electromagnético.

I.9. Campo y potencial gravitatorios

Si sobre una partícula de masa m actúa una fuerza de origen gravitatorio, la aceleración producida por la misma, comúnmente llamada aceleración de la gravedad, es

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Cuando estudiamos un problema en la superficie de la Tierra, por ejemplo una partícula en caída libre, consideramos que \vec{g} no depende de la altura; como veremos más adelante, ésta es una aproximación que se puede hacer si las variaciones en altura consideradas son pequeñas frente al radio de la Tierra. En general, \vec{g} será función de la posición.

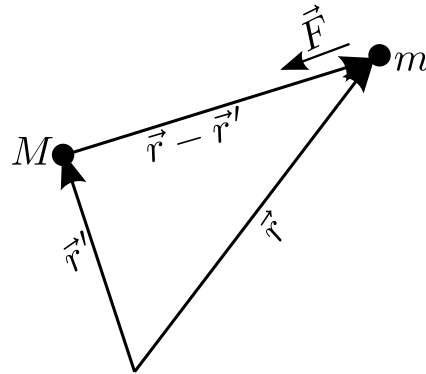
Una distribución de masa cualquiera ejercerá una interacción sobre una partícula, de masa m pequeña, llamada masa de prueba. La fuerza que se ejerce sobre esta partícula dependerá de la posición de la misma y de su masa. Podemos definir un campo vectorial, que llamaremos campo gravitatorio, $\vec{g}(\vec{r})$, haciendo el cociente entre la fuerza ejercida sobre la partícula de prueba y su masa:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

$\vec{g}(\vec{r})$ resultará independiente del valor de m . La distribución de masas es entonces fuente de un campo gravitatorio $\vec{g}(\vec{r})$ que “inunda” todo el espacio; al colocar una

partícula de masa m en cualquier punto \vec{r} , por estar en presencia de dicho campo, se ejercerá sobre la partícula una fuerza igual a

$$\vec{F} = m \vec{g}(\vec{r})$$



Empecemos por considerar dos partículas puntuales de masas m y M , con vectores posición \vec{r} y \vec{r}' . La ley de gravitación universal de Newton establece que la fuerza que ejerce la partícula de masa M sobre la de masa m está dada por

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{I.77})$$

o sea que es atractiva, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas y dirigida según la recta que las une. La constante de proporcionalidad es la constante de gravitación

$$G \approx 6,7 \times 10^{-8} \frac{\text{dinas cm}^2}{\text{g}^2}$$

Entonces el campo gravitatorio producido por una partícula puntual de masa M ubicada en el punto \vec{r}' es

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{I.78})$$

Este campo vectorial \vec{g} se puede derivar de una función escalar $\phi(\vec{r})$, llamada potencial gravitatorio, a través de la relación

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \quad (\text{I.79})$$

La energía potencial de una partícula de masa m en el punto r será entonces

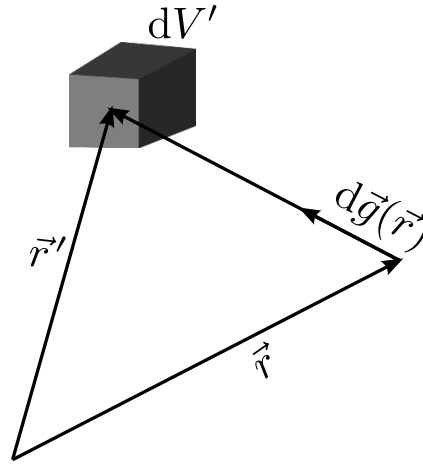
$$U = m\phi(\vec{r}) \quad (\text{I.80})$$

El potencial gravitatorio producido por una partícula de masa M ubicada en \vec{r}' es, teniendo en cuenta (I.78) y (I.79),

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{I.81})$$

Si la fuente del campo gravitatorio está constituida por n partículas de masas M_i en posiciones \vec{r}_i , el campo gravitatorio que producen será la suma del producido por cada partícula

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^n M_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$



Si la fuente es una distribución continua de masa con una densidad de masa $\rho(\vec{r}')$, contenida en un volumen V' , podemos evaluar primero la contribución $d\vec{g}$ al campo gravitatorio producida por un elemento de volumen dV' ubicado en \vec{r}' ; la masa de este elemento de volumen será

$$dm = \rho(\vec{r}') dV'$$

por lo que (I.78)

$$d\vec{g}(\vec{r}) = -G\rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Para obtener el campo gravitatorio producido por toda la distribución de masa, sumamos sobre todos los elementos de volumen en V' :

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int_{V'} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (\text{I.82})$$

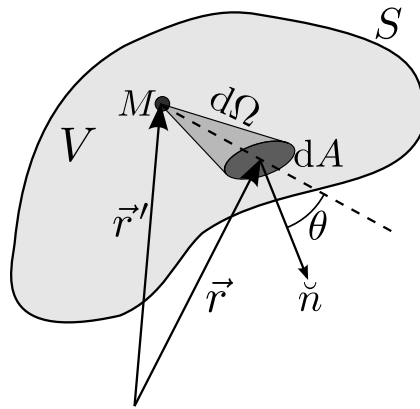
Haciendo un análisis similar tendremos que el potencial gravitatorio producido por la distribución de masa es

$$\phi(\vec{r}) = -G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (\text{I.83})$$

Las leyes son totalmente similares a las del campo electrostático (ley de Coulomb), con la diferencia de que en el caso gravitatorio la fuerza siempre es atractiva, o el campo gravitatorio apunta siempre hacia la fuente, mientras que en el caso eléctrico la fuerza puede ser atractiva o repulsiva. Además las constantes en juego son diferentes.

Ley de Gauss

Buscaremos una relación entre el flujo del campo gravitatorio a través de una superficie cerrada y la masa encerrada.



Sea S una superficie cerrada que rodea un volumen V dentro del cual, en el punto \vec{r}' , hay una partícula de masa M que es la fuente de un campo gravitatorio \vec{g} . Consideremos un elemento de superficie dA ubicado en la posición \vec{r} y de normal \vec{n} ; el mismo subtende a la posición de la carga un ángulo sólido diferencial $d\Omega$. Se cumple la relación

$$dA \cos(\theta) = |\vec{r} - \vec{r}'|^2 d\Omega \quad (\text{I.84})$$

Por otro lado el valor de \vec{g} en el punto \vec{r} es

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

por lo que

$$\vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = -GM \frac{\cos(\theta)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

siendo θ el ángulo entre $\vec{r} - \vec{r}'$ y \vec{n} .

Si calculamos el flujo del campo gravitatorio integrando sobre toda la superficie S resulta

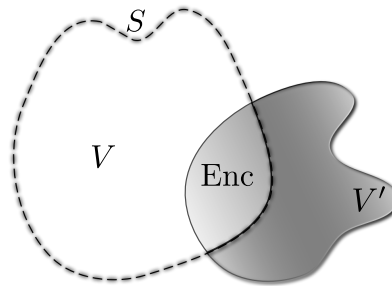
$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, dA &= -GM \oiint_S \frac{\cos(\theta)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \, dA \\ &= -GM \int d\Omega = -4\pi GM \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

donde hemos usado (I.84)

Si la masa M estuviera fuera de V , al integrar sobre el ángulo sólido daría cero. Es fácil ver que si en lugar de una masa puntual se tuviera una distribución de masa V' , encerrada total o parcialmente por el volumen V

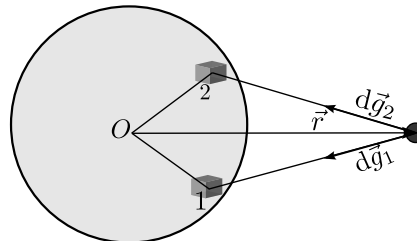
$$\oiint_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, dA = -4\pi G \int_V \rho(\vec{r}') \, dV = -4\pi GM_{\text{Enc}} \quad (\text{I.86})$$

O sea el flujo del campo gravitatorio es proporcional a la masa encerrada; ésta es la ley de Gauss.



La ley de Gauss es útil para calcular \vec{g} en situaciones donde la densidad de masa tiene alguna simetría. Veremos en el caso de simetría esférica; pongamos el origen de coordenadas en el centro de la distribución y usemos coordenadas esféricas (r, θ, φ) ; debido a la simetría la densidad de masa $\rho(\vec{r}')$ dependerá sólo de $|\vec{r}'| = r'$. Dado un punto \vec{r} cualquiera dentro o fuera de la distribución de masa, se tendrá que para un elemento de volumen cualquiera (1) habrá uno simétrico (2) de tal forma que $d\vec{g}_1 + d\vec{g}_2$ tenga sólo componente r . Luego, el campo gravitatorio producido por una distribución de masa con simetría esférica sólo tiene componente r , y ésta, por la simetría, sólo dependerá de r :

$$\vec{g}(\vec{r}) = g_r(r)\vec{r} \quad (\text{I.87})$$

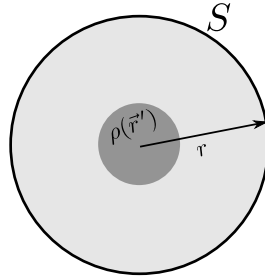


Con este resultado podemos obtener una expresión de \vec{g} usando la ley de Gauss. Consideremos como superficie de integración para calcular el flujo del campo gravitatorio una superficie esférica centrada en el origen de coordenadas y cuyo radio sea r . Por cumplirse (I.87) podemos poner

$$\oiint \vec{g}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \, dA = g_r(r) \oiint dA = 4\pi g_r(r) r^2$$

Usando el teorema de Gauss (I.86) resulta

$$4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi GM_{\text{Enc}}$$



Si el punto \vec{r} es exterior a la distribución de masa, M_{Enc} será la masa total M_{Tot} de la distribución y no dependerá de r . Luego en ese caso

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_{\text{Tot}}}{r^2} \vec{r} \quad \text{con } \vec{r} \text{ fuera de la distribución} \quad (\text{I.88})$$

En el caso que \vec{r} está adentro de la distribución de masa M_{Enc} será función de r y tendremos

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_{\text{Enc}}(r)}{r^2} \vec{r} = -\frac{G}{r^2} 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \, dr' \quad (\text{I.89})$$

Si estamos fuera de la Tierra y suponemos que la distribución de masa de la misma es esférica

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{r} \quad M_T : \text{ masa de la Tierra}$$

y será función de la altura. Para un punto a altura Δh medido desde la superficie terrestre

$$\vec{g}(R_T + \delta h) = -\frac{GM_T}{(R_T + \Delta h)^2} \vec{r} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2\Delta h}{R_T} + \dots \right) \vec{r}$$

Si $\Delta h \ll R_T$ podemos aproximar \vec{g} por su valor en la superficie

$$\vec{g} \approx -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{r} \quad (\text{I.90})$$

Sin embargo, la distribución de masa de la Tierra no tiene simetría esférica, por lo que habrá variaciones locales de \vec{g} , por ejemplo, en la cercanía de una montaña.

I.10. Vínculos – Coordenadas generalizadas

Los vínculos son restricciones al movimiento de una o varias partículas. Por ejemplo: una partícula debe moverse sobre la superficie de una esfera, a lo largo de una curva, o en el exterior de una esfera; un ejemplo que involucra muchas partículas es el de cuerpo rígido: la distancia entre partículas es constante.

Clasificaremos los vínculos en dos tipos: *holónomos* y *no holónomos*. Holónomos son aquellos que se pueden expresar por una o más relaciones de la forma

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (\text{I.91})$$

por ejemplo, que una partícula se mueve sobre la superficie de una esfera de radio a se puede poner

$$|\vec{r}| - a = 0$$

o sea que es un vínculo holónimo con una sola relación de vínculo.

Que una partícula esté restringida a moverse sobre una curva se puede poner

$$F_1(x, y, z) = 0$$

$$F_2(x, y, z) = 0$$

o sea que es un vínculo holónimo con dos relaciones de vínculo.

La condición de que un cuerpo sea rígido se puede poner

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| - c_{ij} = 0$$

el número de relaciones de vínculo en este caso es muy grande.

Vínculos no holónomos son aquellos que no se pueden llevar a esta forma. No los analizaremos en este curso.

Los vínculos tienen dos consecuencias que debemos resolver; por un lado las coordenadas que dan la posición de las partículas, en cartesianas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N$, no son más independientes entre sí; por otro lado aparecen fuerzas de vínculo que no se conocen a priori, pues dependen del movimiento de la o las partículas.

El primer problema se resuelve utilizando coordenadas generalizadas que sean independientes; el segundo escribiendo las ecuaciones de movimiento de forma tal que las fuerzas de vínculo no aparezcan en las mismas.

Las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_l son un conjunto cualquiera de variables que permiten describir la posición de un sistema de partículas.

Supongamos que tenemos N partículas y que no hay vínculos; el número mínimo de coordenadas que necesitamos para describir la posición del sistema es $3N$, y serán independientes entre sí; por ejemplo las coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N$.

El número de coordenadas independientes necesario para describir la posición del sistema es en número de grados de libertad, n . Para N partículas sin vínculos, $n = 3N$. Supongamos ahora que tenemos k relaciones de vínculo holónomo.

$$F_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{I.92})$$

el número de grados de libertad se reduce en k

$$n = 3N - k \quad (\text{I.93})$$

y las coordenadas cartesianas no serán todas independientes entre sí. Definiremos n cantidades independientes entre sí, función de los vectores posición de las N partículas, que llamaremos coordenadas generalizadas q_l :

$$q_l = q_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \\ q_l(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \quad l = 1, \dots, n \quad (\text{I.94})$$

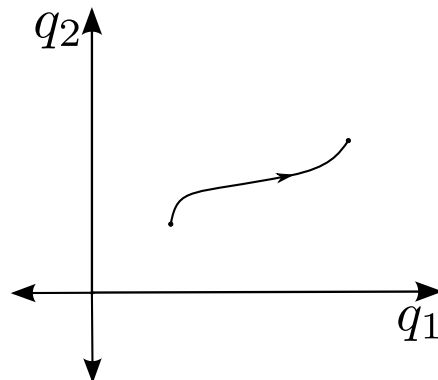
Dadas las n coordenadas generalizadas queda determinada la posición del sistema. Las k relaciones de vínculo (I.92) y las n ecuaciones que definen las coordenadas generalizadas (I.94) dan

$$k + n = k + (3N - k) = 3N$$

ecuaciones que permiten poner las $3N$ variables $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$ en función de las coordenadas generalizadas, o sea, poner

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t) \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (\text{I.95})$$

Llamaremos espacio de configuración a un espacio n -dimensional en el que se hace corresponder un eje cartesiano a cada coordenada generalizada. Una posición del sistema mecánico corresponde a un punto en el espacio de configuración, y la evolución del sistema está representada por una curva en este espacio. Por ejemplo, para $n = 2$



El problema de las fuerzas de vínculo se puede soslayar utilizando como ecuaciones de movimiento las ecuaciones de Lagrange. Estas se pueden deducir de la segunda ley de Newton y de la idea que las fuerzas de vínculo no realizan trabajo virtual, o de un principio independiente, el principio de Hamilton, que es un principio variacional. En el presente curso las deduciremos de esta última forma.

I.11. Principio de Hamilton – Ecuaciones de Lagrange

Las leyes de movimiento de un sistema mecánico se pueden deducir, en forma independiente a las leyes de Newton, de un principio distinto a éstas, el principio de Hamilton. Este es también llamado a veces principio de mínima acción, pero en general este nombre se usa para un principio más restringido.

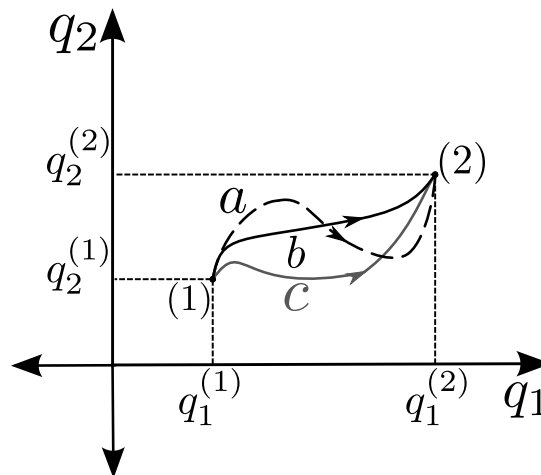
La segunda ley de Newton es una relación entre vectores y es diferencial: en cada punto de la trayectoria la derivada del impulso debe ser proporcional a la fuerza. En cambio en el principio de Hamilton se trabaja con escalares y es un principio integral: lo que debe cumplir una condición es toda la trayectoria, pues esta debe hacer mínima o estacionaria cierta integral.

Consideremos un sistema descrito por coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n ; las interacciones de las partículas entre sí o del sistema con el exterior se pueden derivar de una función potencial (que puede ser un potencial generalizado) $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$.

Principio de Hamilton: De todas las trayectorias compatibles con los vínculos que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de una posición a otra, dadas en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima, o estacionaria, la integral temporal de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, en el intervalo considerado.

Consideraremos únicamente sistemas mecánicos con vínculos holónomos, por lo que las coordenadas q_1, \dots, q_n son independientes si el número de grados de libertad es n .

Cada posición del sistema está representada por un punto en el espacio de configuración, y la trayectoria es una curva en el mismo espacio. Supongamos $n = 2$.



El sistema está en la posición (1) de coordenadas $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ en el instante t_1 y en la posición (2) de coordenadas $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}$ en el instante t_2 . Las curvas (a), (b), (c) son

compatibles con los vínculos, pero la trayectoria que realmente ocurre es aquella que hace estacionaria (mínima, máxima o punto de inflexión) la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$$

A la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial se la llama función lagrangiana o lagrangiano del sistema; en general será una función de las coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n , de las velocidades generalizadas y del tiempo.

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U \quad (\text{I.96})$$

Veamos primero para un grado de libertad el significado del principio de Hamilton, y cómo deducimos la ecuación de movimiento a partir del mismo. Consideremos un sistema descrito por una coordenada generalizada q que a $t = t_1$ está en $q^{(1)}$ y a $t = t_2$ está en $q^{(2)}$. Respetando los vínculos podemos unir esas posiciones en un tiempo determinado de infinitas maneras, o sea, con diferentes dependencias $q(t)$. La integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (\text{I.97})$$

será función de la forma en que q depende de t . La dependencia de q en t que realmente ocurre es la que hace extrema, o en general estacionaria, la integral (I.97).

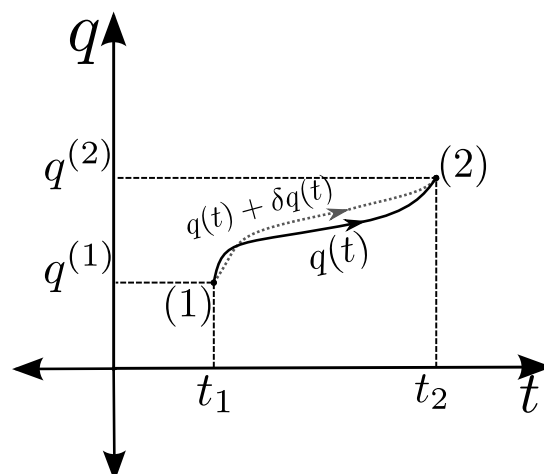
Hay un método matemático, el *método variacional*, que permite encontrar extremos de integrales, que, como en este caso, dependen de funciones que están en el integrando.

Supongamos que $q(t)$ sea la trayectoria verdadera, o sea la que hace estacionaria a S . Una curva levemente modificada que cumpla la condición de que a t_1 el sistema está en $q^{(1)}$ y a t_2 en $q^{(2)}$ se obtiene sumando a $q(t)$ una pequeña variación $\delta q(t)$

$$q(t) + \delta q(t) \quad (\text{I.98})$$

que satisfaga

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (\text{I.99})$$



Para que S sea estacionaria con la función $q(t)$, la primera variación δS debe anularse. La variación δS es el término en primer orden en δq de la diferencia de S calculado con $q(t) + \delta q(t)$ y S calculado con $q(t)$. O sea, el término de primer orden de

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (\text{I.100})$$

debe anularse¹. Observemos que las variaciones $\delta q(t)$ se hacen a un t fijo².

Haciendo un desarrollo de Taylor a primer orden

$$\mathcal{L}(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

Luego

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (\text{I.101})$$

Teniendo en cuenta que para la variación de la velocidad

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} (q + \delta q) - \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (\delta q)$$

e integrando el 2º término de (I.101) por partes

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \end{aligned}$$

Recordando que en los límites del intervalo $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (I.99), queda

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} (q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) (q, \dot{q}, t) \right) \delta q(t) dt = 0 \quad (\text{I.102})$$

que debe anularse por el principio de Hamilton.

Como las variaciones $\delta q(t)$ son funciones arbitrarias de t , para que se anule la integral debe cumplirse:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (\text{I.103})$$

Esta es la Ecuación de Lagrange (o de Euler-Lagrange) para $n = 1$.

¹Análogamente a lo que sucede con una función. $f(x)$ tiene extremo en x_0 si $df = \frac{df}{dx} dx = 0$ en x_0 .

²Esto corresponde a un desplazamiento virtual, ya que un desplazamiento real requiere una variación temporal.

Consideremos ahora un sistema mecánico de n grados de libertad descrito por coordenadas generalizadas independientes q_1, \dots, q_n , que a tiempo t_1 valen $q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$ y a tiempo $t_2, q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)}$. El principio de Hamilton establece que

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt = 0 \quad (\text{I.104})$$

Si $q_1(t), \dots, q_n(t)$ es la dependencia de las coordenadas en el tiempo en la trayectoria verdadera, consideramos trayectorias variadas

$$q_i(t) + \delta q_i(t) \quad i = 1, \dots, n$$

donde las variaciones $\delta q_i(t)$ cumplen la condición

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.105})$$

ya que la posición inicial y la final son fijas.

Haciendo un desarrollo a primer orden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n + \delta \dot{q}_n, t) &= \\ &= \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

Reemplazando en (I.104), integrando por partes, y teniendo en cuenta (I.105) se tiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.107})$$

donde hemos igualado a cero para hacer cumplir el principio de Hamilton. Como las variaciones $q_i(t)$ son funciones arbitrarias de t e independientes entre sí, para que se anule la integral en (I.107) debe anularse lo que multiplica a cada δq_i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.108})$$

Estas son las ecuaciones de Lagrange para n grados de libertad, y son las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana. Como \mathcal{L} depende de q_i y de \dot{q}_i , la derivada $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i})$ contendrá hasta derivadas segundas en el tiempo: \ddot{q}_i . Luego las ecuaciones de Lagrange (I.108) son un sistema de n ecuaciones diferenciales de 2º orden con n funciones incógnitas $q_1(t), \dots, q_n(t)$.

Como primer ejemplo, consideremos una partícula sin vínculos bajo la acción de una fuerza conservativa derivable del potencial $U(\vec{r})$. Elegimos como coordenadas las cartesianas $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Luego, el Lagrangiano lo podemos poner

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

con lo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$

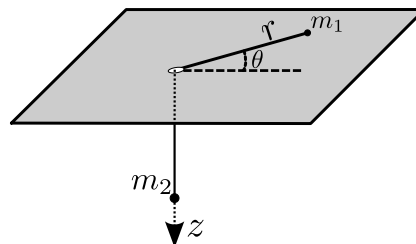
Las ecuaciones de Lagrange son entonces

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

obteniendo las ecuaciones de movimiento que da la 2ª ley de Newton.



Como segundo ejemplo consideraremos dos partículas con vínculos. Supongamos dos partículas unidas por una cuerda inextensible, sin masa; una de masa m_1 , se

mueve sobre una mesa horizontal sin roce y la otra, de masa m_2 , cuelga y se mueve en la vertical. La cuerda pasa por un agujero en la mesa y no hay rozamiento entre la cuerda y la mesa. Los vínculos son:

- m_1 se mueve en un plano: 1 relación de vínculo.
- m_2 se mueve en una recta: 2 relaciones de vínculo.
- m_1 y m_2 están unidas: 1 relación de vínculo.

Luego $k = 4$ y $n = 3N - k = 6 - 4 = 2$.

Habrán dos coordenadas independientes. Elegimos r (distancia de m_1 al orificio) y θ (ángulo de la cuerda con una dirección fija). Si l es la longitud de la cuerda, la posición z de m_2 se puede poner

$$z = l - r$$

Luego

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Tomando como cero del potencial gravitatorio la mesa

$$U = -m_2gz = -m_2g(l - r)$$

El lagrangiano resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + m_2g(l - r)$$

de donde las dos ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{r}] - (m_1r\dot{\theta}^2 - m_2g) &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m_1r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{r} = -m_2g + m_1r\dot{\theta}^2 \\ m_1r^2\dot{\theta} = cte \end{cases}$$

El peso de la partícula (2) tiende a disminuir r mientras que la fuerza centrífuga tiende a aumentarlo. Además vemos que hay una cantidad, $m_1r^2\dot{\theta}$, que se conserva; es la componente de impulso angular en la dirección z y su conservación está relacionada con que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$.

I.11.1. Teoremas de Conservación

De propiedades de simetría del sistema mecánico o invariancia del Lagrangiano ante una coordenada o ante el tiempo se deducen teoremas de conservación similares a los de la mecánica newtoniana.

Invariancia de traslación y conservación del impulso lineal total

Supongamos que las propiedades mecánicas del sistema no varían ante una traslación de todo el conjunto en una dirección, por ejemplo, x . Usando la coordenada x del centro de masa, X_{CM} como coordenada generalizada, el Lagrangiano no se modificará al cambiar su valor, o sea

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{CM}} = 0$$

De la correspondiente ecuación de Lagrange se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_{CM}} = cte \quad (\text{I.109})$$

o sea que hay una magnitud que se conserva en cada trayectoria. Veamos el significado físico de la misma en el caso de que la energía potencial no dependa de la velocidad \dot{X}_{CM} .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_{CM}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{X}_{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{X}_{CM}} \quad (\text{I.110})$$

Al trasladar el sistema en conjunto en δX_{CM} la posición de cada partícula varía en

$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \delta X_{CM} \check{x}$$

Como la relación entre velocidades es la misma que entre coordenadas

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{X}_{CM}} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial X_{CM}} = \check{x}$$

de (I.110) resulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_{CM}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \check{x} = \vec{P} \cdot \check{x} = P_x \quad (\text{I.111})$$

Una simetría de traslación implica la conservación de una magnitud, que, en el caso de que la energía potencial no dependa de las velocidades, es la componente del impulso lineal total en la dirección correspondiente.

Invariancia de rotación y conservación del impulso angular total

En forma similar se puede mostrar que, si las propiedades mecánicas del sistema no dependen de φ , donde φ es una coordenada cuya variación significa una rotación de todo el sistema mecánico en su conjunto alrededor de la dirección del versor \hat{n} , entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = cte \quad (\text{I.112})$$

El significado físico de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$, cuando la energía potencial no depende de φ , es la componente del impulso angular de todo el sistema en la dirección \hat{n}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \vec{L} \cdot \hat{n} \quad (\text{I.113})$$

Una simetría de rotación implica, en este caso, conservación de la correspondiente componente del impulso angular.

Impulso generalizado

Por extensión de la relación $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_{CM} = P_x$ se define el impulso canónico conjugado a la variable q_j , o impulso generalizado p_j a

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (\text{I.114})$$

Si el Lagrangiano no depende de una coordenada en particular, por ejemplo, q_j , diremos que esta es una *variable cíclica* y en ese caso el impulso canónico correspondiente se conserva; en efecto, de la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \implies p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte \quad (\text{I.115})$$

Invariancia en el tiempo y conservación de la energía

Supongamos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$. Calculemos la variación total en el tiempo a lo largo de una trayectoria

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}} + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right]$$

Reemplazando las ecuaciones de Lagrange queda

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right] = 0$$

O sea en sistemas en que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, como por ejemplo los sistemas cerrados, se tiene una integral de movimiento

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte \quad (\text{I.116})$$

A esta magnitud, aunque no se conserve, se la conoce como Hamiltoniano

$$H = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (\text{I.117})$$

Haciendo bastante álgebra se puede ver que, si se cumplen las siguientes condiciones:

- la energía potencial U es independiente de las velocidades,
- la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas es independiente del tiempo, lo que requiere que los vínculos no dependan del tiempo,

el significado físico del Hamiltoniano es que coincide con la energía mecánica E

$$H = E \quad (\text{I.118})$$

Observemos que las condiciones para que $H = E$ y para que $H = cte$ son distintas.

I.12. Sistemas no inerciales

Consideraremos una partícula sin vínculos y una energía potencial independiente de las velocidades. El Lagrangiano dependerá de $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\dot{\vec{r}}$ y t

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - U$$

donde estamos designando con U a la energía potencial y usando coordenadas cartesianas. Las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

son válidas cualquiera que sea el sistema de referencia, aunque no sea inercial; la diferencia está en la expresión explícita de la energía cinética. Si Σ_0 es un sistema inercial

$$T = \frac{1}{2} m \left| \dot{\vec{r}}_0 \right|^2$$

y las ecuaciones de movimiento resultan

$$m \frac{d\dot{x}_{0i}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x_{0i}}$$

Consideremos ahora un sistema Σ' que se mueva respecto a Σ_0 con una velocidad de traslación que dependa del tiempo $\vec{V}(t)$. Como

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t) \quad (\text{I.119})$$

la energía cinética en función de las variables primadas quedará

$$T = \frac{1}{2} m \left[v'^2 + 2\vec{v}' \cdot \vec{V}(t) + V^2(t) \right] \quad (\text{I.120})$$

Luego las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} \quad i = 1, 2, 3$$

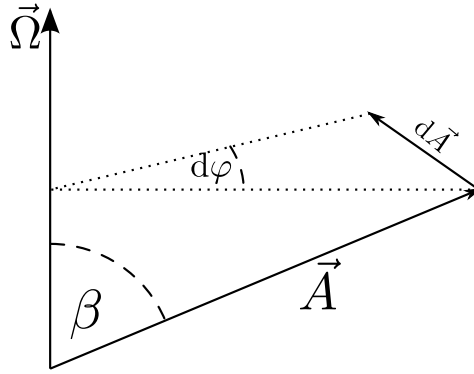
serán

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(\dot{x}'_i + V_i(t) \right) \right] + \frac{\partial U}{\partial x'_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

O sea

$$m \frac{d\dot{x}'_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x'_i} - m \frac{dV_i(t)}{dt} \quad (\text{I.121})$$

La influencia de un movimiento acelerado del sistema de referencia en la ecuación de movimiento es equivalente a la aplicación de un campo de fuerzas homogéneo igual al producto de la masa de la partícula por la aceleración $\partial \vec{V} / \partial t$, y en sentido contrario a esta aceleración.



Por otro lado, para analizar los efectos de una rotación, consideremos otro sistema de referencia, llamado Σ' , cuyo origen coincide con Σ_o pero que rota con relación a Σ_o con velocidad angular $\vec{\Omega}(t)$. Si $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular cualquier vector \vec{A}' que no varíe visto desde Σ' tendrá en un intervalo dt una variación $d\vec{A}_o$ visto desde Σ_o ; $d\vec{A}_o$ será un vector perpendicular tanto a \vec{A}' como a la dirección instantánea de rotación que coincide con la dirección de $\vec{\Omega}(t)$. Su módulo es

$$|d\vec{A}_o| = |\vec{A}'| \text{sen}(\beta) d\varphi$$

donde $d\varphi = \Omega dt$ es el ángulo que rota Σ' respecto a Σ_o en el intervalo dt , y β es el ángulo entre \vec{A}' y el eje de rotación. Luego

$$\frac{d\vec{A}_o}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{A}'$$

Si además el vector \vec{A}' está variando respecto a Σ' se tiene

$$\frac{d\vec{A}_o}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}' \quad (\text{I.122})$$

Si \vec{A}' es el vector posición \vec{r}' obtenemos la relación

$$\vec{v}_o = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (\text{I.123})$$

Reemplazando en la expresión de la energía cinética en el sistema inercial

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m \left[v'^2 + 2\vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[v'^2 + 2(\vec{v}' \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{r}' + \Omega^2 r'^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}')^2 \right] \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\partial L}{\partial x'_i} = m \left(\vec{v}' \times \vec{\Omega} \right)_i + m \Omega^2 x'_i - m \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}' \right) \Omega_i - \frac{\partial U}{\partial x'_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_i} = m \dot{x}'_i + m \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}' \right)_i$$

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$m \ddot{x}'_i = - \frac{\partial U}{\partial x'_i} + m \left(\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}} \right)_i + 2m \left(\vec{v}' \times \vec{\Omega} \right)_i + m \left[\vec{\Omega} \times \left(\vec{r}' \times \vec{\Omega} \right) \right]_i \quad (\text{I.124})$$

Los términos adicionales que aparecen debido a que el sistema de referencia no es inercial sino que está rotando son tres: el término $m(\vec{r}' \times \dot{\vec{\Omega}})$ es debido a que $\vec{\Omega}$ varía en el tiempo pero los otros dos existen aunque $\vec{\Omega}$ sea constante: la *fuerza de Coriolis* (que depende de la velocidad de la partícula) $2m \vec{v}' \times \vec{\Omega}$ y la *fuerza centrífuga* $m \vec{\Omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\Omega})$ que está en el plano definido por \vec{r}' y $\vec{\Omega}$, y que es perpendicular a $\vec{\Omega}$ y tiende a alejar a la partícula del eje de rotación.

Capítulo II

Tensores cartesianos

II.1. Matrices

Una matriz A es un arreglo de $m \times n$ números, reales o complejos, a_{ij}

$$a_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

distribuidos en m filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Casos particulares son la matriz cuadrada ($m = n$), la matriz fila ($m = 1$) y la matriz columna $n = 1$.

Se llama matriz traspuesta de una matriz A , a la matriz A^T que se obtiene intercambiando filas por columnas

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (\text{II.2})$$

o sea

$$(a^T)_{ij} = a_{ji}$$

Se pueden definir las siguientes operaciones con matrices:

- Dadas dos matrices A y B , ambas de $m \times n$, la suma $A + B$ es otra matriz C de $m \times n$ cuyos elementos c_{ij} son a suma de los elementos de A y los de B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{II.3})$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

- El producto de una matriz A por un número λ es la matriz B de elemento $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

$$B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

- Dada una matriz A de $m \times n$ y otra matriz B de $n \times p$, el producto de A por B es otra matriz C , de $m \times p$, cuyo elemento c_{ij} se obtiene multiplicando el k -ésimo elemento de la fila i de A por el k -ésimo elemento de la columna j de B y sumando sobre todos los k desde 1 a n .

$$C = A.B$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{II.5})$$

El producto de matrices es asociativo

$$A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C \quad (\text{II.6})$$

Cuando las matrices son ambas cuadradas, también existe el producto $B.A$, pero salvo casos particulares

$$A.B \neq B.A \quad (\text{II.7})$$

o sea el producto de matrices en general no es conmutativo.

Dada una matriz A de $m \times n$ y dos matrices B y C de $n \times p$, se cumple la propiedad distributiva

$$A.(B + C) = A.B + A.C \quad (\text{II.8})$$

Se llama matriz identidad I a una matriz cuadrada cuyos elementos diagonales valen 1 y los demás elementos cero.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.9})$$

o sea los elementos i_{kl} de la matriz identidad valen

$$i_{kl} = \delta_{kl}$$

donde δ_{kl} es la delta de Kronecker

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Para cualquier matriz de $m \times n$

$$A.I = A$$

$$I.A = A \quad (\text{II.11})$$

donde I es una matriz de $n \times n$ en la primera igualdad, y de $m \times m$ en la segunda.

La inversa A^{-1} de una matriz cuadrada de $m \times m$ es otra matriz de $m \times m$ que satisface

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \quad (\text{II.12})$$

No toda matriz posee inversa; para que exista, el determinante de la matriz debe ser distinto de cero.

El determinante de una matriz cuadrada de $n \times n$, que se designa con $\det A$, $|A|$ o $|a_{ij}|$ es

$$|A| = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \quad (\text{II.13})$$

Hemos usado el símbolo de Levi-Civita

$$\underbrace{\varepsilon_{ijl\dots}}_{n \text{ índices}} = \begin{cases} 0 & \text{si hay dos índices iguales} \\ 1 & \text{si todos los índices son distintos y son una permutación par de } 1, 2, \dots, n \\ -1 & \text{si todos los índices son distintos y son una permutación impar de } 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

El determinante es entonces la suma de todos los productos posibles de n elementos que pertenezcan a distintas filas y columnas multiplicados por 1 o -1 según

que, habiendo ordenado los elementos por filas, el número de las columnas sea una permutación par o impar de $1, 2, \dots, n$. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

Se puede mostrar que el determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes

$$|A \cdot B| = |A||B| \quad (\text{II.15})$$

y que

$$|A^T| = |A|$$

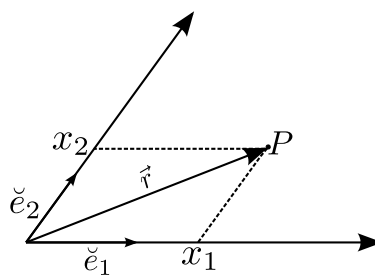
II.2. Sistemas de coordenadas

Para dar la posición de un punto P en una recta, nos basta con dar un número, en el plano 2 y en el espacio común 3.

Hay diferentes maneras de hacerlo. Una de ellas es usando un sistema de *coordenadas cartesianas*. Se elige un origen O y (en el caso del espacio) 3 ejes rectos. En la dirección de estos ejes se toman 3 versores $\check{e}_1, \check{e}_2, \check{e}_3$. El vector posición \vec{r} del punto P se puede descomponer en estas 3 direcciones

$$\vec{r} = x_1\check{e}_1 + x_2\check{e}_2 + x_3\check{e}_3 \quad (\text{II.16})$$

x_1, x_2 y x_3 son las coordenadas del punto P en el sistema elegido. El siguiente gráfico corresponde al caso de un plano



Una característica fundamental de los sistemas de coordenadas cartesianas es que los versores \check{e}_i son siempre los mismos para todo punto del espacio. Por lo tanto se puede poner también

$$d\vec{r} = dx_1\check{e}_1 + dx_2\check{e}_2 + dx_3\check{e}_3 \quad (\text{II.17})$$

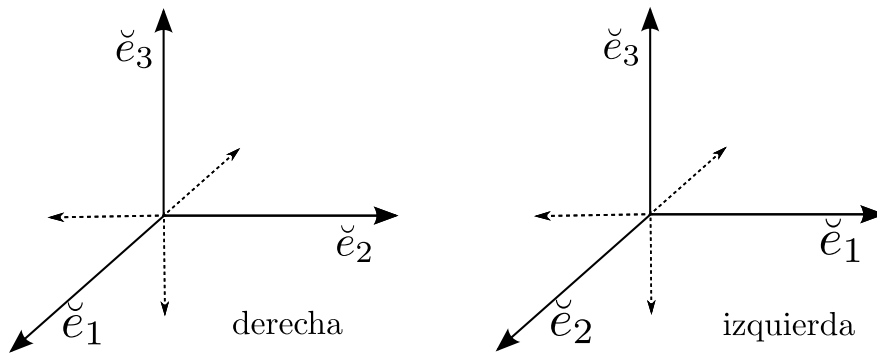
Cualquier vector \vec{v} queda expresado en función de sus componentes v_i como

$$\vec{v} = v_1\check{e}_1 + v_2\check{e}_2 + v_3\check{e}_3 \tag{II.18}$$

Entre los sistemas de coordenadas cartesianas se distinguen los sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales en los que los versores \check{e}_i son ortogonales entre sí

$$\check{e}_i \perp \check{e}_j \quad i \neq j$$

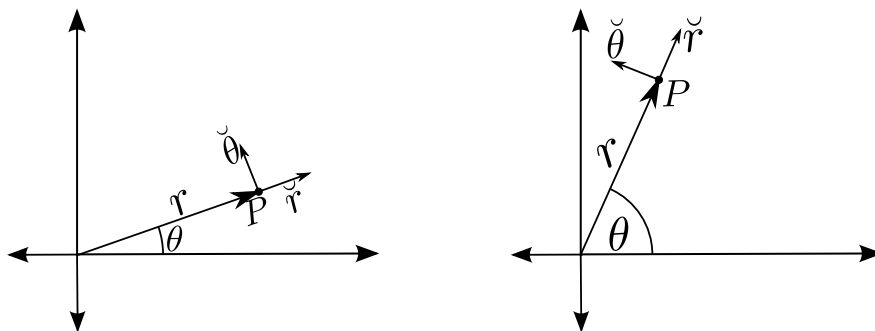
Se distingue también entre terna derecha y terna izquierda



Una notación más común es

$$\begin{matrix} x_1 \Rightarrow x & x_2 \Rightarrow y & x_3 \Rightarrow z \\ \check{e}_1 \Rightarrow \check{i} & \check{e}_2 \Rightarrow \check{j} & \check{e}_3 \Rightarrow \check{k} \end{matrix}$$

En los sistemas de coordenadas curvilíneas, a diferencia de los cartesianos, los versores \check{e}_i tienen diferentes direcciones según el punto del espacio. Por ejemplo, en coordenadas polares en el plano, $x_1 = r$ es la distancia del punto P al origen y $x_2 = \theta$ es el ángulo que forma el vector posición con una dirección fija; llamando $\check{e}_1 = \check{r}$ y $\check{e}_2 = \check{\theta}$, los versores \check{r} y $\check{\theta}$ varían al cambiar la posición del punto P .



En los sistemas de coordenadas curvilíneas, al ser los versores \check{e}_i diferentes para diferentes puntos, no es posible escribir una expresión como la de (II.16) para el vector posición sino sólo una expresión similar a la (II.17) para su diferencial $d\vec{r}$. Al hacerlo

hay que tener en cuenta que las coordenadas curvilíneas no tienen necesariamente dimensión de longitud y una variación dx_i puede no representar directamente una variación $d\vec{r}$ por lo que hay que multiplicarla por alguna magnitud para que así lo haga. Por ejemplo, en coordenadas polares en el plano, $x_2 = \theta$ es un ángulo y

$$d\vec{r} = dr\check{r} + r d\theta\check{\theta} = dx_1\check{x}_1 + x_1 dx_2\check{x}_2 \quad (\text{II.19})$$

Para cualquier vector \vec{v} , que no sea el vector posición \vec{r} , sigue siendo válida la expresión (II.18) en función de sus componentes, igual que en cartesianas. En ciertos contextos a estas componentes se las llama componentes físicas para distinguirlas de las llamadas componentes covariantes y contravariantes.

Los sistemas de coordenadas curvilíneas más comunes en el espacio son las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) y las esféricas (r, θ, φ) . Sus relaciones con las cartesianas (x, y, z) son

Cilíndricas	Esféricas
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$
$z = z$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

(II.20)

y la relación entre versores es

Cilíndricas	Esféricas
$\check{\rho} = \cos(\varphi)\check{x} + \sin(\varphi)\check{y}$	$\check{r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\check{x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\check{y} + \cos(\theta)\check{z}$
$\check{\varphi} = -\sin(\varphi)\check{x} + \cos(\varphi)\check{y}$	$\check{\theta} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\check{x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\check{y} - \sin(\theta)\check{z}$
$\check{z} = \check{z}$	$\check{\varphi} = -\sin(\varphi)\check{x} + \cos(\varphi)\check{y}$

(II.21)

Ambos sistemas tienen indeterminación en la dirección de los versores sobre el eje $\rho = 0$ (cilíndricas) o $\theta = 0$ (esféricas).

II.3. Transformación de coordenadas – Transformaciones ortogonales – Rotaciones

Una transformación general de coordenadas está dada por relaciones

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, \dots) \quad (\text{II.22})$$

que dan las coordenadas de un punto P en un sistema x'_i en función de sus coordenadas en otro sistema x_i . Por ejemplo, en (II.20) se da la transformación de coordenadas entre cartesianas y cilíndricas y entre cartesianas y esféricas.

Cuando se pasa de un sistema de coordenadas cartesianas a otro cartesiano, la transformación es lineal. La relación entre las coordenadas de un mismo punto en dos sistemas diferentes en este caso es

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (\text{II.23})$$

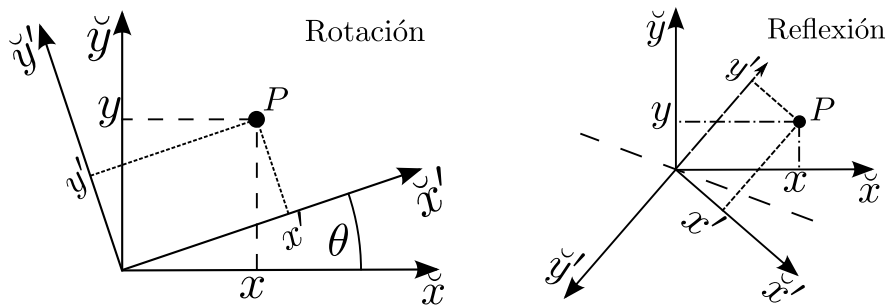
donde los a_{ij} son constantes. La matriz de los a_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \quad (\text{II.24})$$

se llama *matriz de la transformación*.

II.3.1. Transformaciones ortogonales

Un caso particular de transformación lineal es la transformación ortogonal, que pasa de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal a otro similar. Pueden ser rotaciones o reflexiones. En el primer caso una terna derecha sigue siendo derecha y en el segundo pasa a ser una terna izquierda. Haremos un gráfico suponiendo que el eje z no cambia.



Para una rotación en θ alrededor del eje z

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ y' &= -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z' &= z \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Obtengamos la relación entre los versores \check{e}_i y \check{e}'_i para transformaciones lineales. Un punto cuyas coordenadas en el sistema sin primar sean $x_j = \delta_{ij}$ tendrá un vector posición \vec{r} que podemos expresar en los dos sistemas de coordenadas

$$\vec{r} = \check{e}_i = \sum_j x'_j \check{e}'_j$$

Usando la expresión (II.23) que relaciona las coordenadas se obtiene

$$\check{e}_i = \sum_{j,k} a_{jk} x_k \check{e}'_j = \sum_{j,k} a_{jk} \delta_{ik} \check{e}'_j = \sum_j a_{ji} \check{e}'_j \quad (\text{II.26})$$

En el caso de transformaciones ortogonales tanto los versores \check{e}_i como los \check{e}'_i son ortogonales, o sea $\check{e}_i \cdot \check{e}_j = \delta_{ij}$ y $\check{e}'_i \cdot \check{e}'_j = \delta_{ij}$. Luego

$$\delta_{ij} = \check{e}_i \cdot \check{e}_j = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \check{e}'_k \cdot \check{e}'_l = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_k a_{ki} a_{kj}$$

Esta última expresión es el producto de la matriz traspuesta, A^T , por la matriz A . Resulta

$$A^T \cdot A = I \quad (\text{II.27})$$

y por lo tanto, multiplicando por A a la izquierda y por A^{-1} a la derecha

$$A \cdot A^T = I$$

Tenemos entonces que, para una transformación ortogonal, la matriz inversa de la matriz de la transformación es igual a la traspuesta:

$$A^{-1} = A^T \quad (\text{II.28})$$

y se cumplen las relaciones

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} \quad (\text{II.29})$$

Además $|A| = 1$ (rotaciones) o $|A| = -1$ (reflexiones).

II.4. Tensores cartesianos

Definiremos los tensores por las propiedades de transformación de sus componentes ante cambios de coordenadas. Consideraremos solamente los tensores cartesianos definidos por sus propiedades ante transformaciones entre sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales. A diferencia de los tensores en general, en los que se consideran transformaciones más generales de coordenadas, en los tensores cartesianos no es necesario distinguir entre componentes covariantes y componentes contravariantes.

Sea un espacio vectorial de n dimensiones. Sean x_1, x_2, \dots, x_n y x'_1, x'_2, \dots, x'_n las coordenadas de un punto en dos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales, que estarán relacionados por una transformación ortogonal de matriz A

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{ij} x_j \quad (\text{II.30})$$

Aquí hemos utilizado la convención de Einstein: siempre que un subíndice, que no tenga un valor dado, aparezca dos veces en un mismo término, significa que se deberán sumar los términos que se obtienen al dar al subíndice los valores de 1 a n .

Por ser ortogonal, la matriz A satisface (II.28) y los coeficientes a_{ij} cumplen por lo tanto las relaciones (II.29).

- Tensor de rango cero o escalar: es una cantidad ϕ que antes cambio de coordenadas permanece invariante

$$\phi' = \phi \quad (\text{II.31})$$

- Tensor de rango 1 o vector: n cantidades v'_i ($i = 1 \dots n$) que ante cambio de coordenadas se transforman con la siguiente ley

$$v'_i = a_{ij}v_j \quad (\text{II.32})$$

constituyen las componentes de un tensor de 1^{er} rango o vector.

- Tensor de rango dos: n^2 cantidades t_{ij} que ante cambio de coordenadas se transforman con la ley

$$t'_{ij} = a_{il}a_{jm}t_{lm} \quad (\text{II.33})$$

son las componentes de un tensor de segundo rango. Si asociamos a una matriz T las componentes t_{ij} la ley de transformación (II.33) se puede poner

$$T' = ATA^T \quad (\text{II.34})$$

- Tensor de rango q : n^q cantidades $t_{i_1 \dots i_q}$ que ante cambio de coordenadas se transforman con la ley

$$t'_{i_1 \dots i_q} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_q j_q} t_{j_1 \dots j_q} \quad (\text{II.35})$$

son las componentes de un tensor de rango q .

Ejemplos de tensores de rango cero o escalares son la masa, la energía, el Lagrangiano.

Ejemplos de vectores en el espacio común de tres dimensiones son la velocidad, la fuerza, el impulso lineal.

Ejemplos de tensores de rango dos o mayor se verán a lo largo del curso.

Es fácil ver que la *suma* de tensores de igual rango es un tensor del mismo rango, y que el producto de un escalar por un tensor de rango q , es un tensor de rango q .

Veamos que, si u_i, v_i son las componentes de dos vectores, las n^2 cantidades

$$t_{ij} = u_i v_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{II.36})$$

son las componentes de un tensor de 2^o rango. Ante un cambio de coordenadas de matriz A

$$t'_{ij} = u'_i v'_j = a_{ik} u_k a_{jl} v_l = a_{ik} a_{jl} u_k v_l$$

donde hemos usado la ley de transformación de los vectores, dada por (II.32). Luego

$$t'_{ij} = a_{ik}a_{jl}t_{kl}$$

o sea t_{ij} se transforma como las componentes de un tensor de 2º rango (II.33).

En general, al hacer el producto de las componentes de un tensor por las de otro se obtiene un tensor de rango suma de los rangos originales. Por ejemplo, si u_l son las componentes de un vector, y t_{ij} son las componentes de un tensor de rango 2

$$u_l t_{mn}$$

son las componentes de un tensor de tercer rango.

Hay una operación importante con tensores que se llama contracción de índices que permite obtener un tensor de rango $(q - 2)$ a partir de un tensor de rango $q \geq 2$, y que consiste en igualar dos índices y sumar sobre el índice igualado desde 1 hasta n . Por ejemplo del tensor de 3º rango t_{ijk} , contrayendo el 2º y 3º índice se obtiene un vector o tensor de rango 1

$$v_i = t_{ijj} \quad (\text{II.37})$$

El producto escalar de dos vectores es un caso particular de producto y posterior contracción de índices; $u_i v_j$ es un tensor de 2º rango si u_i y v_j son las componentes de vectores; la contracción de los índices o producto escalar es un escalar o tensor de rango cero

$$\phi = u_i v_i \quad (\text{II.38})$$

Una situación bastante común es la contracción de uno de los índices de un tensor de segundo rango y el índice de un vector, también llamado producto escalar del tensor por el vector, y que da como resultado un vector

$$v_i = t_{ij} u_j \quad (\text{II.39})$$

Para demostrar que, si t_{ij} es un tensor y u_j un vector entonces $v_i = t_{ij} u_j$ es otro vector, obtenemos como se transforma ante cambios de coordenadas

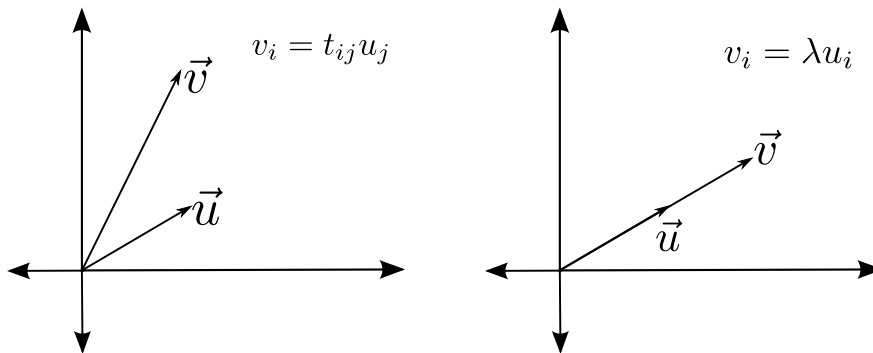
$$\begin{aligned} v'_i &= t'_{ij} u'_j = a_{ik} a_{jl} t_{kl} a_{jm} u_m \\ &= a_{ik} (a_{jl} a_{jm}) t_{kl} u_m \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la transformación es ortogonal, haciendo uso de la primera de las relaciones (II.29) resulta

$$v'_i = a_{ik} \delta_{lm} t_{kl} u_m = a_{ik} t_{kl} u_l = a_{ik} v_k$$

que es la ley de transformación de las componentes de un vector. La demostración para otros casos de contracción de índices es similar.

Que dos vectores estén relacionados por medio de un tensor, como en (II.39) significa que cada componente de un vector es combinación lineal de todas las componentes del otro vector. Por lo tanto, en general, no serán vectores paralelos, a diferencia de lo que sucede cuando un vector es un escalar por otro vector.



La contracción de índices nos permite obtener *test sobre el carácter tensorial* de magnitudes. En particular puede mostrarse que n^2 cantidades h_{ij} que tienen la propiedad de que al multiplicarse con contracción de índices por un vector arbitrario v_j , dan siempre un vector

$$w_i = h_{ij}v_j$$

son las componentes de un tensor de segundo rango.

Obsérvese que si todos los términos de una ecuación tienen carácter tensorial con igual rango, la ecuación es válida en todo sistema de coordenadas.

Un tensor es *simétrico* respecto a dos de sus índices si al permutarlos se obtiene el mismo valor; por ejemplo

$$t_{ij} = t_{ji} \quad \text{ó} \quad \text{(II.40)}$$

$$h_{ijkl} = h_{ilkj}$$

Será *antisimétrico* si al permutar los índices cambia de signo; por ejemplo

$$t_{ij} = -t_{ji} \quad \text{ó} \quad \text{(II.41)}$$

$$h_{ijkl} = -h_{ljki}$$

Cuando un tensor es simétrico o antisimétrico respecto de cualquier par de índices, se llama totalmente simétrico o totalmente antisimétrico.

Un tensor cuyas componentes son iguales a la delta de Kronecker δ_{ij} en un sistema de coordenadas, tendrá en otro sistema de coordenadas componentes también iguales a δ_{ij}

$$t_{ij} = \delta_{ij} \quad \implies \quad t'_{ij} = \delta'_{ij} \quad \text{(II.42)}$$

es un ejemplo de tensor simétrico.

Un tensor (solamente ante rotaciones, no ante reflexiones) totalmente antisimétrico es, por ejemplo, el que tiene como componentes en cualquier sistema de coordenadas

los símbolos de Levi-Civita (II.14); para $n = 3$

$$t_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad \Longrightarrow \quad t'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (\text{II.43})$$

Se llama tensor isotrópico a un tensor cuyas componentes son las mismas en cualquier sistema de coordenadas. Todo escalar es un tensor isotrópico pero no hay vector no nulo que sea isotrópico. Todo tensor de segundo rango isotrópico es un escalar por la delta de Kronecker δ_{ij} (II.42) y todo tensor isotrópico de tercer rango es un escalar por ε_{ijk} (II.43). Asimismo se puede mostrar que todo tensor isotrópico de 4^{to} rango tiene la forma

$$h_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{II.44})$$

donde α, β, γ son escalares.

También se puede demostrar que si $t_{ij} = t_{ij}(\vec{r})$ es tensor de 2^o rango, entonces $\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k}$ es un tensor de 3^{er} rango.

II.4.1. Diagonalización de tensores de 2^{do}

Dado un tensor de segundo rango simétrico y real, siempre existe un sistema de coordenadas en el cual las únicas componentes no nulas del tensor son las que tienen los dos índices iguales

$$t_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Si T es la matriz de los t_{ij} , T es una matriz diagonal, para $n = 3$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$$

El sistema de coordenadas en el que el tensor es diagonal se llama de ejes principales.

Para demostrar que todo tensor simétrico y real es diagonalizable, hagamos el producto contraído (o producto escalar) del tensor de componentes t_{ij} por un vector de componentes v_i , con lo que obtenemos otro vector de componentes w_i :

$$w_i = t_{ij} v_j$$

Buscaremos ahora los vectores de componentes v_i tales que el vector resultante sea paralelo, o sea

$$w_i = \lambda v_i \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{II.45})$$

donde λ es un escalar. En este caso al vector de componentes v_i se lo llama autovector, siendo λ un autovalor.

Para que suceda esto, los v_i deben satisfacer

$$t_{ij} v_j = \lambda v_i \quad (\text{II.46})$$

o equivalentemente

$$(t_{ij} - \lambda \delta_{ij})v_j = 0$$

Este es un sistema de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas, v_i . Para $n = 3$

$$(t_{11} - \lambda)v_1 + t_{12}v_2 + t_{13}v_3 = 0$$

$$t_{21}v_1 + (t_{22} - \lambda)v_2 + t_{23}v_3 = 0$$

$$t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + (t_{33} - \lambda)v_3 = 0$$

Como es un sistema homogéneo, para que tenga solución no trivial, el determinante del sistema debe ser nulo:

$$|T - \lambda I| = 0 \quad (\text{II.47})$$

Para $n = 3$

$$\begin{vmatrix} (t_{11} - \lambda) & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & (t_{22} - \lambda) & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & (t_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{II.47}')$$

Esta ecuación se llama *ecuación secular*. Para $n = 3$ resulta una ecuación de 3^{er} grado para λ , cuyas soluciones son λ_1, λ_2 y λ_3 , que en principio podrían ser complejas. Para mostrar que si t_{ij} es real con $t_{ji} = t_{ij}$, las raíces de la ecuación secular son reales, multiplicamos (II.46) por v_i^* , sumamos sobre i y despejamos λ

$$t_{ij}v_jv_i^* = \lambda v_i v_i^*$$

$$\lambda = \frac{t_{ij}v_jv_i^*}{v_i v_i^*} \quad (\text{II.48})$$

Calculemos ahora el conjugado complejo, λ^*

$$\lambda^* = \frac{t_{ij}^*v_j^*v_i}{v_i^*v_i} = \frac{t_{ij}v_i v_j^*}{v_i v_i^*}$$

por ser las componentes t_{ij} del tensor reales. Como i y j aquí son índices mudos, los podemos intercambiar

$$\lambda^* = \frac{t_{ji}v_jv_i^*}{v_i v_i^*} = \frac{t_{ij}v_jv_i^*}{v_i v_i^*}$$

por ser un tensor simétrico, $t_{ij} = t_{ji}$. Luego, comparando con (II.48), resulta

$$\lambda^* = \lambda \quad (\text{II.49})$$

o sea que las raíces de la ecuación secular, o sea los autovalores, son reales. Por lo tanto los autovectores también lo serán. A cada autovalor λ_α le corresponde un determinado sistema de ecuaciones para las componentes del autovector, que llamaremos v_i^α

$$t_{ij}v_j^\alpha = \lambda_\alpha v_i^\alpha \quad (\text{II.50})$$

Veamos ahora que para autovalores distintos los correspondientes autovectores son ortogonales. Para ello, supongamos $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ y escribamos los sistemas de ecuaciones correspondientes a v_i^α y v_i^β

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha v_i^\alpha &= t_{ij} v_j^\alpha \\ \lambda_\beta v_i^\beta &= t_{ij} v_j^\beta\end{aligned}\tag{II.51}$$

Multipliquemos la primera de estas ecuaciones por v_i^β y la segunda por v_i^α , sumando ambas sobre i , y luego restemos miembro a miembro; resulta la igualdad

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) v_i^\alpha v_i^\beta = t_{ij} (v_j^\alpha v_i^\beta - v_j^\beta v_i^\alpha);$$

como $t_{ij} = t_{ji}$ el segundo miembro se anula. Luego

$$(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) v_i^\alpha v_i^\beta = 0$$

Como supusimos $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ resulta

$$v_i^\alpha v_i^\beta = 0\tag{II.52}$$

Al anularse el producto escalar de los dos autovectores, podemos concluir que son ortogonales.

Cuando un autovalor es una raíz doble de la ecuación secular, hay dos autovectores independientes para ese autovalor, y cualquier combinación de esos dos autovectores será autovector con el mismo autovalor; se podrá siempre elegir dos combinaciones que sean ortogonales entre sí.

Consideremos el espacio de tres dimensiones ($n = 3$). Hay tres autovectores ortogonales entre sí, y que se pueden normalizar, con lo cual podemos formar una base de versores ortonormal. Esta constituye el sistema de *ejes principales*. En este sistema de coordenadas los autovectores v_i^α tienen como componentes

$$v_i^1 = \delta_{i1} \quad v_i^2 = \delta_{i2} \quad v_i^3 = \delta_{i3}\tag{II.53}$$

Para obtener cuanto valen las componentes t_{ij} en el sistema de ejes principales tengamos en cuenta la relación (II.50), válida en todo sistema de coordenadas. Teniendo en cuenta (II.53) tendremos

$$t_{ij} \delta_{j1} = \lambda_1 \delta_{i1}$$

o sea $t_{11} = \lambda_1$ $t_{12} = 0$ $t_{13} = 0$. De la misma forma $t_{21} = 0$ $t_{22} = \lambda_2$ $t_{23} = 0$ y $t_{31} = 0$ $t_{32} = 0$ $t_{33} = \lambda_3$ o sea que el tensor en ese sistema de coordenadas resulta diagonal.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\tag{II.54}$$

Capítulo III

Movimiento del cuerpo rígido

III.1. Cuerpo rígido – Grados de libertad – Sistemas de referencia inercial y solidario al cuerpo – Ángulos de Euler

Cuando la deformación de un sólido se puede considerar como despreciable, se hace la aproximación de cuerpo rígido en la que se considera que la distancia entre las partículas es constante, o sea

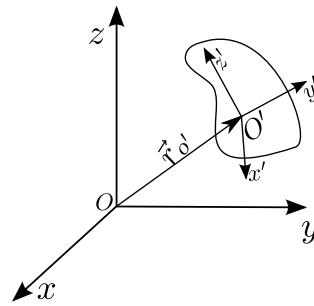
$$\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| = c_{ij}$$

Grados de libertad

Para determinar el número de grados de libertad no es conveniente usar la relación $n = 3N - k$ pues tanto el número de partículas N como las relaciones de vínculo k son cantidades muy grandes, y además las condiciones de vínculo no son independientes. Es más conveniente analizar directamente cuantas coordenadas son necesarias para describir la posición de todas las partículas del cuerpo rígido. La primera partícula que consideremos requiere 3 coordenadas; la segunda debe mantener la distancia a la primera constante por lo que basta dar dos cantidades para dar su posición; la tercera deberá mantener constante la distancia a las otras dos y bastará dar una coordenada; cualquier otra partícula tendrá su posición determinada por estas tres. Luego, el número de grados de libertad del cuerpo rígido es $n = 3 + 2 + 1 = 6$. Corresponden a tres grados de libertad de traslación y tres de rotación.

Sistemas de referencia inercial y solidario al cuerpo

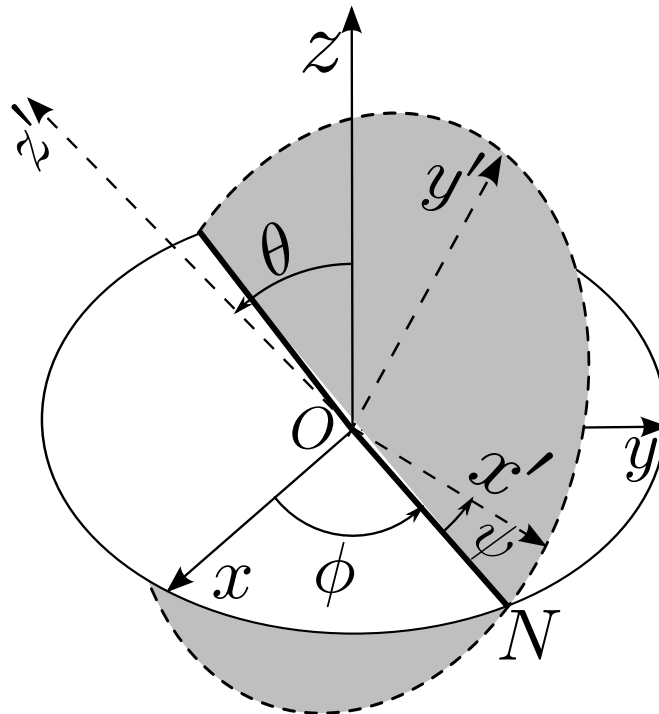
Para describir la posición de un cuerpo rígido es conveniente utilizar dos sistemas de coordenadas: uno inercial centrado en O y de ejes x, y, z , y otro centrado en un punto O' del cuerpo rígido y cuyos ejes x', y', z' , se mueven solidarios al cuerpo.



Las tres coordenadas de traslación corresponden al vector posición $\vec{r}_{O'}$, de O' respecto al sistema inercial. Este punto O' puede ser cualquiera, pero como veremos más adelante, son importantes los casos en que O' es un punto fijo (suponiendo que hay un vínculo adicional que fija ese punto) o que O' sea el CM del cuerpo.

Ángulos de Euler

Los tres grados de libertad de rotación corresponden a los tres ángulos que hay que dar para fijar la orientación de los ejes x' , y' , z' respecto a los ejes x , y , z . Esto se puede hacer de distintas formas, pero la más usual es por medio de los ángulos de Euler. El plano que contiene a los ejes x' , y' , corta al plano que contiene a los ejes paralelos a x , y , a lo largo de una recta, en general variable, llamada línea nodal. Esta recta es perpendicular simultáneamente a los ejes z y z' . Definimos el sentido positivo del eje nodal ON al del vector $\hat{z} \times \hat{z}'$.



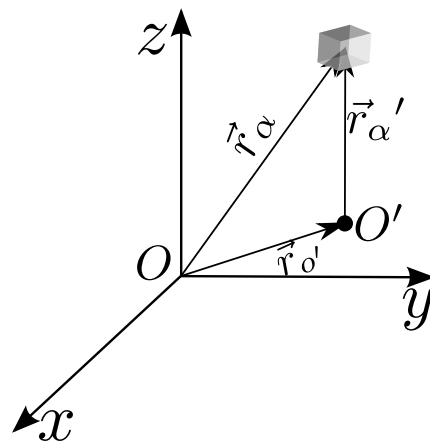
Para dar orientaciones de los ejes x', y', z' respecto de los ejes inerciales x, y, z se dan los siguientes ángulos, llamados *ángulos de Euler*.

- Ángulo θ entre los ejes z y z' ($0 \leq \theta \leq \pi$).
- Ángulo ϕ entre el eje x y la línea nodal ON , desde \check{x} hacia $\check{O}\check{N}$ alrededor de \check{z} ($0 \leq \phi \leq 2\pi$).
- Ángulo ψ entre el eje nodal ON y el eje x' , desde $\check{O}\check{N}$ hacia \check{x}' alrededor de \check{z}' ($0 \leq \psi \leq 2\pi$).

Para pasar de los ejes x, y, z a los ejes x', y', z' se puede hacer una sucesión de tres rotaciones. Primero hacemos una rotación en ϕ alrededor del eje z ; la nueva posición del eje x define ON ; rotamos alrededor de $\check{O}\check{N}$ un ángulo θ ; la nueva posición de z es z' ; y finalmente rotamos alrededor de z' un ángulo ψ .

III.2. Velocidad angular

Un movimiento infinitesimal del cuerpo rígido lo podemos considerar como una traslación infinitesimal $d\vec{r}_{o'}$, más una rotación infinitesimal en un ángulo $d\varphi$ alrededor de un eje que pasa por O' ; la orientación de este eje puede variar con el tiempo.



Sea la partícula α del cuerpo rígido, llamamos \vec{r}_α al vector posición respecto del sistema inercial y \vec{r}'_α al vector posición de la misma partícula respecto al sistema solidario al cuerpo. Se tiene

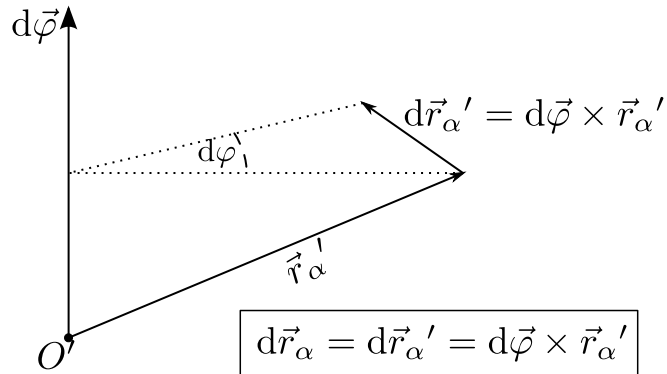
$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{r}_{o'}$$

Si O' es el centro de masa, entonces $\vec{r}_{o'} = \vec{R}$, el vector posición del CM del cuerpo rígido en el sistema inercial.

En una traslación \vec{r}'_α no varía y

$$d\vec{r}_\alpha = d\vec{r}_{o'}$$

En una rotación se mantiene constante $\vec{r}_{o'}$. Definamos el vector $d\vec{\varphi}$ tal que su módulo coincide con el ángulo de rotación, cuya dirección y sentido están dados por el eje de rotación. En función de $d\vec{\varphi}$ podemos poner, si hay una rotación pura



Cuando hay simultáneamente traslación y rotación tendremos que en el sistema inercial

$$d\vec{r}_\alpha = d\vec{r}_{o'} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_\alpha'$$

Por lo tanto la velocidad de un punto del cuerpo rígido respecto al sistema inercial es

$$\vec{v}_\alpha = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_\alpha' \quad (\text{III.1})$$

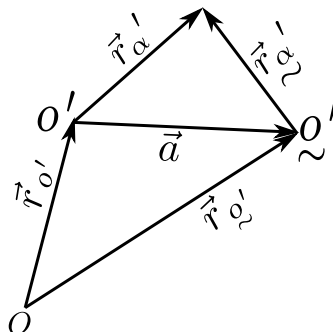
donde $\vec{V}_{o'}$ es la velocidad del punto O' del cuerpo rígido respecto al sistema inercial y

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (\text{III.2})$$

es la velocidad angular del cuerpo rígido. Si O' es el CM, entonces $\vec{V}_{o'} = \vec{V}_{CM}$

Como el punto O' puede ser en principio cualquiera, podemos preguntarnos que sucede si elegimos otro origen para el sistema solidario al cuerpo. Sea \tilde{O}' este nuevo origen, y \vec{a} el vector que va de O' a \tilde{O}' . Se tiene

$$\vec{r}_\alpha' = \vec{a} + \vec{r}_\alpha'' \quad (\text{III.3})$$



donde \vec{r}'_{α} es el vector posición medido desde Q' . Como la velocidad de la partícula considerada vista desde el sistema inercial es la misma

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha} = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha} \quad (\text{III.4})$$

donde $\vec{V}_{o'}$ es la velocidad de traslación y $\vec{\Omega}$ la velocidad angular cuando el origen del sistema sólido al cuerpo es Q' . Reemplazando en (III.4) la relación entre \vec{r}'_{α} y \vec{r}_{α} obtenida en (III.3).

$$\vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times (\vec{a} + \vec{r}'_{\alpha}) = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}$$

Como esto se tiene que cumplir para todas las partículas del cuerpo rígido, resulta

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}$$

$$\vec{V}_{o'} = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{a} \quad (\text{III.5})$$

Por lo tanto la velocidad de rotación es independiente del origen por donde se hace pasar al eje de rotación.

III.3. Energía cinética del cuerpo rígido – Tensor de inercia

Buscaremos una expresión de la energía cinética del cuerpo rígido en función de la velocidad de traslación, de la velocidad angular y de propiedades intrínsecas del cuerpo rígido. Para ello reemplacemos en la expresión de la energía cinética de un conjunto de N partículas la relación (III.1) y operemos algebraicamente

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} |\vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \cdot (\vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left[V_{o'}^2 + 2\vec{V}_{o'} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \right] \end{aligned}$$

La energía cinética aparece como una suma de un término que depende sólo de $\vec{V}_{o'}$, otro sólo de $\vec{\Omega}$ y un tercero que depende tanto de $\vec{V}_{o'}$ como de $\vec{\Omega}$. Este se puede poner

$$\vec{V}_{o'} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \right)$$

y se anula en dos casos

- Si hay un vínculo adicional que haga que un punto del cuerpo rígido esté fijo (en el sistema inercial); eligiendo a ese punto como O' es $\vec{V}_{O'} = 0$.
- Si O' es el CM ya que en ese caso $\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}' = 0$; además $\vec{V}_{O'} = \vec{V}_{CM}$

En adelante supondremos que estamos en una de las dos situaciones y por lo tanto podemos poner

$$T = T_{\text{Rot}} + T_{\text{Trasl}} \quad (\text{III.6})$$

con

$$T_{\text{Trasl}} = \begin{cases} 0 & \text{si } O' \text{ es un punto fijo (en el sistema inercial).} \\ \frac{1}{2} M V_{CM}^2 & \text{si } O' \text{ es el centro de masa.} \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Transformaremos la expresión de T_{Rot} para que aparezcan en forma separada la velocidad angular y las propiedades intrínsecas del cuerpo rígido. Para ello usaremos la relación vectorial

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Luego

$$\begin{aligned} T_{\text{Rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\alpha}') \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\alpha}') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\Omega^2 r_{\alpha}'^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_{\alpha}')^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Proyectaremos tanto $\vec{\Omega}$ como \vec{r}_{α}' sobre los ejes solidarios al cuerpo, x', y', z' :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \Omega_1' \hat{x}' + \Omega_2' \hat{y}' + \Omega_3' \hat{z}' \\ \vec{r}_{\alpha}' &= x_1'^{\alpha} \hat{x}' + x_2'^{\alpha} \hat{y}' + x_3'^{\alpha} \hat{z}' \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_{\alpha}')^2 &= \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i' x_i'^{\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^3 \Omega_j' x_j'^{\alpha} \right) = \sum_{i,j=1}^3 x_i'^{\alpha} x_j'^{\alpha} \Omega_i' \Omega_j' \\ \Omega^2 &= \sum_{i=1}^3 \Omega_i'^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \Omega_i' \Omega_j' \end{aligned}$$

Esto último lo hemos hecho para que ambos términos en (III.8) tengan una sumatoria desde 1 a 3. Reemplazando en (III.8) tenemos:

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \sum_{i,j=1}^3 \left(r_{\alpha}^{\prime 2} \delta_{ij} - x_i^{\prime \alpha} x_j^{\prime \alpha} \right) \Omega_i^{\prime} \Omega_j^{\prime}$$

Intercambiando las sumatorias sobre las partículas y la sumatoria sobre componentes queda

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \Omega_i^{\prime} \Omega_j^{\prime} \quad (\text{III.9})$$

donde

$$I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(r_{\alpha}^{\prime 2} \delta_{ij} - x_i^{\prime \alpha} x_j^{\prime \alpha} \right) \quad (\text{III.10})$$

Los coeficientes I_{ij} dependen de una propiedad intrínseca del cuerpo rígido como es la distribución de la masa, y no del estado cinemático. Los otros factores en (III.9) dependen únicamente de la velocidad angular, y no de como está constituido el cuerpo.

Los coeficientes I_{ij} son las componentes del *tensor de inercia*. Es inmediato ver que se transforma como un tensor de segundo rango. Es simétrico, por lo que hay 6 cantidades independientes. A los elementos diagonales ($i = j$) se los llama momentos de inercia y a los elementos no diagonales se los llama productos de inercia. Llamando \mathbf{I} a la matriz de los I_{ij}

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^{\prime 2} + z_{\alpha}^{\prime 2}) & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^{\prime} y_{\alpha}^{\prime} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^{\prime} z_{\alpha}^{\prime} \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^{\prime} y_{\alpha}^{\prime} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^{\prime 2} + z_{\alpha}^{\prime 2}) & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}^{\prime} z_{\alpha}^{\prime} \\ - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha}^{\prime} z_{\alpha}^{\prime} & - \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}^{\prime} z_{\alpha}^{\prime} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^{\prime 2} + y_{\alpha}^{\prime 2}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Si la distribución de masa se da en forma continua la expresión del tensor de inercia es

$$I_{ij} = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \left[r^{\prime 2} \delta_{ij} - x_i^{\prime} x_j^{\prime} \right] dV' \quad (\text{III.12})$$

El tensor de inercia depende del origen O' elegido. Dado O' , sus componentes dependen de la orientación de los ejes solidarios al cuerpo. Por ser real y simétrico se puede diagonalizar. O sea que existe un sistema de ejes, los ejes principales de inercia, en el cual los elementos no diagonales se anulan. Referido a los ejes principales

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

I_1, I_2 e I_3 se llaman momentos principales de inercia. En este sistema de coordenadas la energía cinética de rotación queda expresada en una forma más simple¹

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \left(I_1 \Omega_1'^2 + I_2 \Omega_2'^2 + I_3 \Omega_3'^2 \right) \quad (\text{III.14})$$

Si $I_1 = I_2 = I_3$ se tendrá un trompo esférico; si dos de los momentos son iguales, por ejemplo $I_1 = I_2 \neq I_3$ se tendrá un trompo simétrico. Si los tres momentos principales son distintos, se trata de un trompo asimétrico.

III.4. Impulso angular del cuerpo rígido

La relación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (\text{III.15})$$

es válida si tanto \vec{L} como \vec{N} se calculan respecto al origen de un sistema inercial. Veremos que cuando se calculan respecto al CM , la relación (III.15) sigue siendo válida, aunque el CM no sea origen de un sistema inercial. Teníamos que para un sistema de partículas (ver (I.72)).

$$\vec{L}_o = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P} \quad (\text{III.16})$$

donde \vec{L}_{CM} es el impulso angular respecto al CM . Calculemos su variación

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} - \dot{\vec{R}} \times \vec{P} - \vec{R} \times \dot{\vec{P}}$$

El 2º término se anula por ser $\dot{\vec{R}} \parallel \vec{P}$. Reemplazando en (III.15) y usando la 2ª ley de Newton

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} &= \vec{N}_o - \vec{R} \times \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} - \vec{R} \times \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \times \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} \end{aligned}$$

donde \vec{r}'_{α} es el vector posición medido desde el CM . Luego

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{N}_{CM} \quad (\text{III.17})$$

Tenemos entonces que la relación $\frac{d\vec{L}'_{o'}}{dt} = \vec{N}'_{o'}$ para el cuerpo rígido será válida en dos casos

¹En cualquier sistema, la energía cinética de rotación es el producto contraído del tensor de inercia por $\vec{\Omega}$, y el resultado nuevamente multiplicado y contraído con $\vec{\Omega}$, dividido 2.

- Si O' es un punto fijo, pues en ese caso será origen de un sistema inercial.
- Si O' es el CM.

Supondremos en adelante que estamos en uno de ambos casos.

Calcularemos $\vec{L}_{O'}$ pero, para simplificar, lo llamaremos \vec{L} .

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[r'_{\alpha}{}^2 \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'_{\alpha}) \vec{r}'_{\alpha} \right]\end{aligned}\tag{III.18}$$

donde se ha usado la relación

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Proyectando tanto $\vec{\Omega}$ como \vec{L} sobre los ejes x', y', z'

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \Omega'_1 \hat{x}' + \Omega'_2 \hat{y}' + \Omega'_3 \hat{z}' \\ \vec{L} &= L'_1 \hat{x}' + L'_2 \hat{y}' + L'_3 \hat{z}'\end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned}L'_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[r'_{\alpha}{}^2 \Omega'_i - \left(\sum_j \Omega'_j x'_j{}^{\alpha} \right) x'_i{}^{\alpha} \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[r'_{\alpha}{}^2 \sum_j \delta_{ij} \Omega'_j - \sum_j \Omega'_j x'_j{}^{\alpha} x'_i{}^{\alpha} \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(r'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - x'_i{}^{\alpha} x'_j{}^{\alpha} \right) \right] \Omega'_j\end{aligned}$$

O sea

$$L'_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega'_j \underbrace{=}_{\substack{\text{usando convención} \\ \text{de Einstein}}} I_{ij} \Omega'_j\tag{III.19}$$

el impulso angular aparece como el producto contraído del tensor de inercia con la velocidad angular.

Obsérvese que la energía cinética de rotación también se puede poner como el producto escalar del impulso angular con la velocidad angular, dividido 2

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} L'_i \Omega'_i \quad (\text{III.20})$$

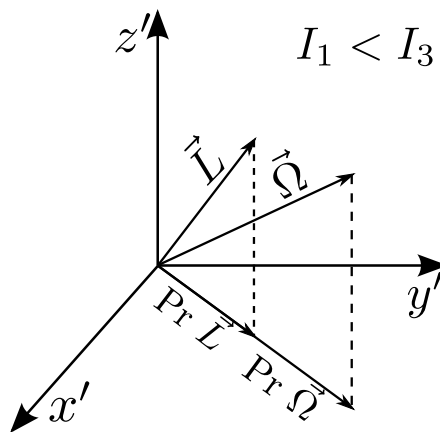
En general entonces, el impulso angular \vec{L} no es paralelo a la velocidad angular $\vec{\Omega}$. Si los ejes solidarios al cuerpo son ejes principales se tendrá

$$\begin{aligned} L'_1 &= I_1 \Omega'_1 \\ L'_2 &= I_2 \Omega'_2 \\ L'_3 &= I_3 \Omega'_3 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

cada componente de \vec{L} depende sólo de la correspondiente componente de $\vec{\Omega}$.

\vec{L} y $\vec{\Omega}$ serán paralelos en dos situaciones

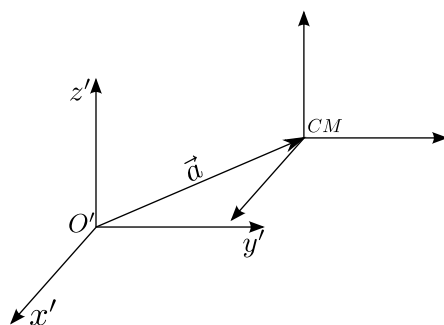
- $\vec{\Omega}$ está en la dirección de un eje principal, en cuyo caso \vec{L} está en la misma dirección.
- El trompo es esférico: $I_1 = I_2 = I_3 = I$ en cuyo caso $\vec{L} = I\vec{\Omega}$.



Si el trompo es simétrico, entonces \vec{L} , $\vec{\Omega}$ y el eje de simetría son coplanares. Para verlo supongamos que z' es el eje de simetría y proyectemos \vec{L} y $\vec{\Omega}$ sobre el plano x', y' : $Pr \vec{L}$, $Pr \vec{\Omega}$. Al ser $I_1 = I_2$, estas proyecciones son colineales, por lo que \vec{L} , $\vec{\Omega}$ y z' son coplanares.

Teorema de Steiner

Dijimos que el tensor de inercia dependía del origen elegido para el sistema fijo al cuerpo. Hay una relación, relación de Steiner, que permite calcular las componentes del tensor de inercia referidas a un origen cualquiera si se conocen las componentes del tensor de inercia respecto del CM .



Sea un sistema de ejes centrado en O' y sea \vec{a} el vector posición del CM respecto a O' ; considerando un sistema de ejes paralelo al primero pero con origen en el CM , se puede mostrar la relación

$$I_{ij} = I_{ij}^{CM} + M \left(a^2 \delta_{ij} - a'_i a'_j \right) \quad (\text{III.22})$$

donde M es la masa total, I_{ij} el tensor de inercia referido a O' e I_{ij}^{CM} el referido al CM .

III.5. Relación entre las componentes de Ω en el sistema fijo al cuerpo y la variación de los ángulos de Euler

La orientación de los ejes x', y', z' respecto a los inerciales x, y, z , está dada por los ángulos de Euler. Una rotación del cuerpo es una variación de esta orientación relativa, o sea, una variación de los ángulos de Euler. Por lo tanto habrá una relación entre las componentes Ω'_i y $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$.

Una rotación infinitesimal alrededor del eje de rotación la podemos considerar como la resultante de una rotación alrededor de \check{z} (variación de ϕ), una rotación alrededor de $O\check{N}$ (variación de θ) y una rotación alrededor de \check{z}' (variación de ψ); ver página 61. Luego

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \check{z} + \dot{\theta} O\check{N} + \dot{\psi} \check{z}' \quad (\text{III.23})$$

Proyectando los versores \check{z} y $O\check{N}$ en la dirección de los ejes x', y', z' se tiene

$$\begin{aligned} \check{z} &= \sin(\theta) \sin(\psi) \check{x}' + \sin(\theta) \cos(\psi) \check{y}' + \cos(\theta) \check{z}' \\ O\check{N} &= \cos(\psi) \check{x}' - \sin(\psi) \check{y}' \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Reemplazando en (III.23)

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \left(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \right) \check{x}' + \left(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \right) \check{y}' + \\ &\quad + \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) \check{z}' \end{aligned}$$

de donde obtenemos la relación entre las componentes de Ω en el sistema solidario al sólido rígido y la variación de los ángulos de Euler:

$$\begin{aligned}\Omega'_1 &= \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \Omega'_2 &= \dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\psi) \\ \Omega'_3 &= \dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi}\end{aligned}\tag{III.25}$$

III.6. Ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido

III.6.1. Lagrangiano

Hemos visto que, tomando como origen O' al CM del cuerpo rígido, podemos separar la energía cinética en dos términos, uno de traslación y uno de rotación

$$T = T_{\text{Trasl}} + T_{\text{Rot}}$$

donde

$$T_{\text{Trasl}} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega'_i \Omega'_j$$

Si elegimos como ejes solidarios al cuerpo los ejes principales

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1'^2 + I_2 \Omega_2'^2 + I_3 \Omega_3'^2)\tag{III.26}$$

además las componentes del impulso angular quedan

$$L'_i = I_i \Omega'_i \quad (\text{sin sumar sobre } i)\tag{III.27}$$

En estas expresiones las componentes del tensor de inercia son respecto al CM .

Para obtener las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido podemos utilizar las ecuaciones de Lagrange. Para ello debemos poner el Lagrangiano en función de las coordenadas generalizadas

$$X, Y, Z, \theta, \phi, \psi$$

y de las velocidades generalizadas

$$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$$

designamos aquí con X, Y, Z las coordenadas del CM .

Consideraremos el caso en que la energía potencial depende sólo de las coordenadas; luego

$$U = U(X, Y, Z, \theta, \phi, \psi) \quad (\text{III.28})$$

La energía cinética de traslación queda en función de $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$:

$$T_{\text{Trasl}} = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \quad (\text{III.29})$$

Para expresar la energía cinética de rotación en función de los ángulos de Euler y de sus variaciones, reemplazamos (III.25) en (III.26):

$$\begin{aligned} T_{\text{Rot}} = & \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\phi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2}I_2 \left(\dot{\phi} \sin(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \sin(\psi) \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2}I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Esta expresión se simplifica en el caso de trompo simétrico ($I_1 = I_2$)

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 \quad (\text{III.31})$$

El Lagrangiano del sistema será

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U = & T_{\text{Trasl}}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) + \\ & + T_{\text{Rot}}(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) - U(X, Y, Z, \theta, \phi, \psi) \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

De aquí se pueden obtener, usando las ecuaciones de Lagrange, 3 ecuaciones para el movimiento de traslación y 3 para el de rotación, que pueden estar acopladas.

Si uno de los puntos del cuerpo es fijo, tomando ese punto como origen O' , resulta $T_{\text{Trasl}} = 0$ y T_{Rot} tiene una expresión similar a (III.30), o (III.31), pero las componentes del tensor de inercia son respecto al punto fijo y no respecto al CM.

III.6.2. Ecuaciones de Euler

Otra forma de plantear el problema, que es adecuada para estudiar el movimiento visto desde el cuerpo rígido, es obtener la variación de las componentes, en el sistema solidario al cuerpo, de la velocidad angular. Si bien esto se puede lograr trabajando con las ecuaciones de Lagrange, es más directo hacerlo usando las leyes de Newton.

Para el movimiento de traslación del CM tenemos simplemente

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (\text{III.33})$$

Para obtener la variación de las componentes Ω_i de la velocidad angular, tendremos en cuenta la relación de éstas con el impulso angular, y la ley de variación del impulso angular en el tiempo. La relación entre el impulso angular y la velocidad angular mediante el tensor de inercia toma una forma simple si el sistema de referencia es el solidario al cuerpo rígido y si se utilizan como ejes los ejes principales de inercia (III.21). Por otro lado, para que sea válida la ley

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (\text{III.34})$$

el origen del sistema solidario al cuerpo debe ser el CM o un punto fijo (III.17 y discusión siguiente).

El sistema de ejes x', y', z' solidario al cuerpo rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ respecto al sistema inercial, por lo que podemos aplicar lo visto en el capítulo I.12, **Sistemas no inerciales**. Si llamamos $\frac{d\vec{A}}{dt}$ a la variación temporal de una magnitud vectorial vista desde el sistema inercial, y $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ cuando es vista desde el sistema de ejes en rotación se tiene (ver I.122)

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A} \quad (\text{III.35})$$

Obsérvese que

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \dot{A}'_1 \check{x}' + \dot{A}'_2 \check{y}' + \dot{A}'_3 \check{z}'$$

mientras que $\frac{d\vec{A}}{dt}$ tiene en cuenta también que los versores $\check{x}', \check{y}', \check{z}'$ varían en el tiempo

Aplicando la relación (III.35) al impulso angular se tiene

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (\text{III.36})$$

donde

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = \dot{L}'_1 \check{x}' + \dot{L}'_2 \check{y}' + \dot{L}'_3 \check{z}' \quad (\text{III.37})$$

Usando la relación (III.34) resulta

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = \vec{N} - \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (\text{III.38})$$

En el sistema de ejes principales

$$L'_i = I_i \Omega'_i \quad \Longrightarrow \quad \dot{L}'_i = I_i \dot{\Omega}'_i \quad (\text{Sin suma})$$

Llamando N'_i a las componentes de \vec{N} en los ejes solidarios al cuerpo, o sea

$$\vec{N} = N'_1 \check{x}' + N'_2 \check{y}' + N'_3 \check{z}'$$

de (III.38) obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}'_1 + (I_3 - I_2) \Omega'_2 \Omega'_3 &= N'_1 \\ I_2 \dot{\Omega}'_2 + (I_1 - I_3) \Omega'_3 \Omega'_1 &= N'_2 \\ I_3 \dot{\Omega}'_3 + (I_2 - I_1) \Omega'_1 \Omega'_2 &= N'_3 \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Estas son las *ecuaciones de Euler* que relacionan el momento de fuerzas aplicado con la variación de las componentes de la velocidad angular. Obsérvese que, salvo que el trompo sea esférico, estas variarán aunque el momento de fuerzas se anule.

III.7. Trompo simétrico libre

Analizaremos el movimiento de rotación de un trompo simétrico sobre el que no actúa ningún momento de fuerzas. Tomaremos como eje \hat{z}' el eje de simetría, con lo que $I_1 = I_2 \neq I_3$. Recordemos que en el caso de trompo simétrico \vec{L} , $\vec{\Omega}$, \hat{z}' son coplanares. Al ser $\vec{N} = 0$, el impulso angular \vec{L} es un vector constante respecto al sistema inercial. Para ver como varía $\vec{\Omega}$ usamos las ecuaciones de Euler, que en este caso son

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}'_1 + (I_3 - I_1) \Omega'_2 \Omega'_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\Omega}'_2 + (I_1 - I_3) \Omega'_3 \Omega'_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\Omega}'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

De la última de estas ecuaciones se obtiene inmediatamente

$$\Omega'_3 = cte \quad (\text{III.41})$$

Por otro lado, multiplicando la 1ª por Ω'_1 y la segunda por Ω'_2 y sumando se tiene

$$I_1 (\Omega'_1 \dot{\Omega}'_1 + \Omega'_2 \dot{\Omega}'_2) = 0$$

o sea

$$\Omega'^2_1 + \Omega'^2_2 = cte \quad (\text{III.42})$$

el módulo de la proyección de $\vec{\Omega}$ sobre el plano perpendicular al eje de simetría es constante; como la componente sobre este eje también es constante (III.41) resulta

$$|\vec{\Omega}| = cte \quad (\text{III.43})$$

Derivando respecto a t la primera de las ecuaciones en (III.40)

$$I_1 \ddot{\Omega}'_1 + (I_3 - I_1) \Omega'_3 \dot{\Omega}'_2 = 0$$

y reemplazando $\dot{\Omega}'_2$ de la segunda obtenemos la ecuación

$$I_1 \ddot{\Omega}'_1 + \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \Omega'_3{}^2 \Omega'_1 = 0$$

cuya solución es

$$\Omega'_1 = A \cos(\tilde{\omega}t + \varphi) \quad (\text{III.44})$$

con

$$\tilde{\omega} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_3 \quad (\text{III.45})$$

Usando nuevamente la 1ª ecuación de Euler

$$\Omega'_2 = -\frac{I_1}{I_3 - I_1} \frac{1}{\Omega'_3} \dot{\Omega}'_1$$

de donde resulta

$$\Omega'_2 = A \text{sen}(\tilde{\omega}t + \varphi) \quad (\text{III.46})$$

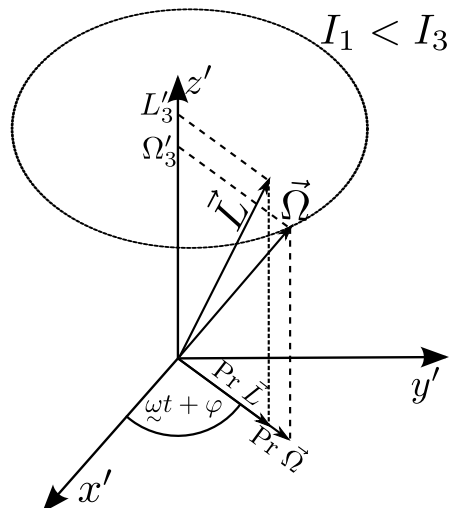
Resumiendo

$$\Omega'_1 = A \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

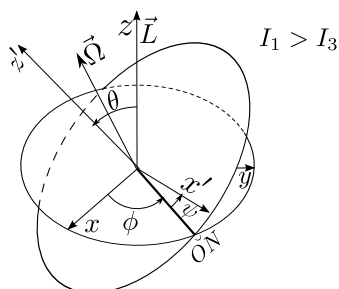
$$\Omega'_2 = A \text{sen}(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

$$\Omega'_3 = \text{cte} \quad (\text{III.47})$$

Visto desde el cuerpo rígido el vector velocidad angular precesiona alrededor del eje de simetría z' con velocidad angular $\tilde{\omega}$, lo mismo hará el impulso angular \vec{L} ya que al ser el trompo simétrico, \vec{L} , $\vec{\Omega}$ y z' son coplanarios.



Para analizar como es el movimiento visto desde el sistema inercial, calculamos la variación de los ángulos de Euler. En lugar de usar las ecuaciones de Lagrange aprovecharemos que \vec{L} es integral de movimiento y lo pondremos en función de los ángulos de Euler y su variación. Como \vec{L} es un vector constante, podemos tomar el eje inercial z en la dirección de \vec{L} .



Con esta elección, la proyección de \vec{L} sobre los ejes x', y', z' , es

$$\begin{aligned} L'_1 &= L \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \\ L'_2 &= L \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \\ L'_3 &= L \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Por otro lado, si x', y', z' son ejes principales, $L'_i = I_i \Omega'_i$, y utilizando (III.25) que da la relación entre los Ω_i y la variación de los ángulos de Euler se tiene

$$\begin{aligned} L'_1 &= I_1 \left(\dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \right) \\ L'_2 &= I_1 \left(\dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\psi) \right) \\ L'_3 &= I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

De (III.48) y (III.49) se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_1 \left(\dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \right) &= L \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \\ I_1 \left(\dot{\phi} \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) - \dot{\theta} \operatorname{sen}(\psi) \right) &= L \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \\ I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) &= L \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{III.50})$$

Multiplicando la 1ª ecuación por $\cos(\psi)$ y la 2ª por $\operatorname{sen}(\psi)$ y restando resulta

$$I_1 \dot{\theta} = 0 \implies \boxed{\theta = cte} \quad (\text{III.51})$$

Multiplicando la 1ª ecuación por $\sin(\psi)$ y la 2ª por $\cos(\psi)$ y sumando

$$I_1 \dot{\phi} \sin(\theta) = L \sin(\theta) \implies \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{I_1}} \quad (\text{III.52})$$

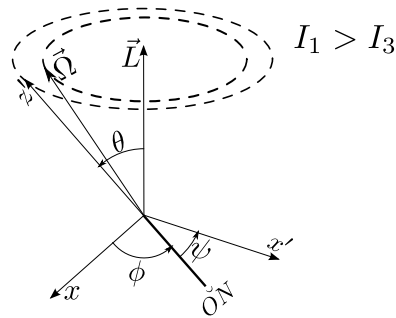
De la 3ª ecuación

$$\dot{\psi} = \left(\frac{L}{I_3} - \dot{\phi} \right) \cos(\theta) = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) L \cos(\theta) = \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} L'_3$$

Finalmente

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3} \quad (\text{III.53})$$

Vemos entonces que el ángulo θ entre el eje de simetría z' del trompo y \vec{L} es constante; además z' precesiona alrededor de \vec{L} con velocidad angular $\dot{\phi}$ constante, ya que z' es perpendicular al eje nodal y este se mueve con velocidad angular $\dot{\phi}$ alrededor de \vec{L} . Al ser z' , $\vec{\Omega}$ y \vec{L} coplanares, $\vec{\Omega}$ también precesiona alrededor de \vec{L} .



Además el trompo rota sobre su propio eje de simetría con velocidad angular $\dot{\psi} = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3$. Obsérvese que $\dot{\psi}$ es igual, con el signo cambiado, a $\dot{\omega}$; esta era la velocidad de precesión de \vec{L} alrededor de z' en la visión desde el trompo.

Capítulo IV

Elasticidad lineal

IV.1. Descripción de la deformación de los sólidos – Tensor de deformaciones

Un cuerpo sólido deformable puede cambiar de forma o volumen si sobre él actúan fuerzas externas, aún cuando la resultante sea nula, o si se modifican las condiciones termodinámicas a las que se halle sometido.

Para el estudio de los cuerpos deformables utilizaremos la aproximación de medio continuo. Cuando hablemos de un punto del cuerpo nos referiremos no a un átomo o molécula sino a un elemento de volumen que contendrá un gran número de moléculas pero cuyas dimensiones son macroscópicamente infinitesimales.

El movimiento de un sólido deformable se puede considerar como combinación de una traslación del cuerpo en su conjunto, una rotación rígida y una deformación que consiste en desplazamientos relativos de un elemento de materia respecto a los otros, produciendo cambios en la forma y el volumen del cuerpo. Al tratarse de un sólido, los desplazamientos relativos de elementos cercanos son pequeños. En este capítulo veremos como describir esta deformación y cómo se relaciona con las fuerzas aplicadas al cuerpo.

Diremos que un sólido se encuentra en un estado no deformado cuando sobre él no actúan fuerzas externas y en toda su extensión existe una temperatura uniforme T_0 .

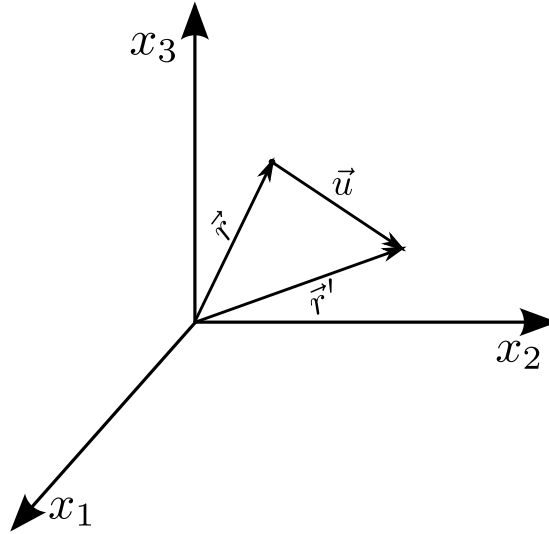
Sea $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ el vector posición de un punto del cuerpo sólido no deformado y $\vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ el vector posición del mismo elemento de materia después de la deformación. Definimos el vector desplazamiento $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$, o sea

$$u_i = x'_i - x_i \quad (\text{IV.1})$$

Las coordenadas x'_i del punto desplazado dependen de la posición original, o sea son función de las coordenadas x_i , y el vector desplazamiento también lo será

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{IV.2})$$

Si se conoce el vector desplazamiento \vec{u} para todo punto del cuerpo queda totalmente especificada la deformación producida por las fuerzas externas o los cambios térmicos.



Cuando los cuerpos se deforman cambia la distancia entre sus puntos. Consideremos dos puntos cercanos cuyas coordenadas antes de la deformación difieren en dx_i ; después de la deformación diferirán en

$$dx'_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \quad (\text{IV.3})$$

La distancia entre los puntos antes de la deformación está dada por

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2} = \sqrt{\delta_{ij} dx_i dx_j}$$

y la distancia después de la deformación por

$$dl' = \sqrt{(dx'_1)^2 + (dx'_2)^2 + (dx'_3)^2} = \sqrt{\delta_{ij} dx'_i dx'_j}$$

Reemplazando la relación (IV.3) podemos poner

$$\begin{aligned} (dl')^2 &= \delta_{ij} \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l \right) \\ &= \delta_{ij} \left[dx_i dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_i dx_l + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_k dx_l \right] \end{aligned}$$

Usando las propiedades de la delta de Kronecker resulta

$$(dl')^2 = (dl)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_i dx_l + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

Cambiando la designación de los índices de suma (o índices mudos) en el segundo término $i \rightarrow k$ y en el tercer término $j \rightarrow l$ podemos poner

$$(dl')^2 = (dl)^2 + \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dx_k dx_l$$

Definiendo el tensor de deformaciones

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (\text{IV.4})$$

podemos poner

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\varepsilon_{kl} dx_k dx_l \quad (\text{IV.5})$$

Que ε_{kl} son las componentes de un tensor de segundo rango se puede ver del hecho de que el producto contraído de ε_{kl} con el vector de componentes dx_k y nuevamente con dx_l da como resultado un escalar: $(dl')^2 - (dl)^2$, cualquiera que sea el valor del vector.

En el límite elástico, que es el que vamos a considerar, las deformaciones son pequeñas. Por ejemplo el límite elástico de una barra de acero en tensión es sobrepasado si el estiramiento fraccional de la barra es mayor que el 0,1%. Supondremos entonces que las derivadas del vector desplazamiento son pequeños, con lo que ε_{ij} también lo es y podemos despreciar los términos cuadráticos en (IV.4). En este caso el tensor de deformaciones se puede aproximar

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{IV.6})$$

La ventaja de esta aproximación reside en el hecho de que así la relación entre desplazamiento y deformación es una relación lineal, lo que facilita el cálculo. Sin embargo hay situaciones, como las barras muy delgadas, o las placas finas, en las que una de las dimensiones del cuerpo elástico es de un orden de magnitud diferente a los otros, en los que los términos cuadráticos de la expresión del tensor de deformaciones no se pueden despreciar.

Veamos el significado geométrico de las diferentes componentes del tensor de deformaciones, en el caso de pequeñas deformaciones. Consideremos un elemento lineal de materia que antes de la deformación está paralelo al eje x_1 y de longitud dx_1 . Después de la deformación, de (IV.5)

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2\varepsilon_{11} (dx_1)^2$$

Despejando ε_{11} tenemos, ya que $(dx_1)^2 = (dl)^2$

$$\varepsilon_{11} = \frac{(dl')^2 - (dl)^2}{2(dl)^2} = \frac{(dl' - dl)(dl' + dl)}{2(dl)^2}$$

Teniendo en cuenta que la deformación es pequeña, aproximamos $dl' + dl \approx 2 dl$, con lo que resulta

$$\varepsilon_{11} = \frac{(dl' - dl)}{dl} \quad (\text{IV.7})$$

Por lo tanto ε_{11} se puede interpretar como la elongación relativa de un elemento lineal que está en la dirección x_1 . En forma similar se interpretan las otras componentes diagonales ε_{22} y ε_{33} . Si ε_{11} es negativo, se trata de una compresión o acortamiento.

Para dar una interpretación geométrica de la componente no diagonal ε_{12} , consideremos dos elementos lineales de materia que parten del mismo punto, uno paralelo al eje x_1 , de longitud $dx_1^{(1)}$ y otro paralelo al eje x_2 , de longitud $dx_2^{(2)}$; ambos elementos forman entre sí un ángulo $\pi/2$ antes de la deformación. Después de la deformación los vectores $d\vec{r}'^{(1)}$ y $d\vec{r}'^{(2)}$ tendrán por componentes

$$dx_i'^{(1)} = dx_i^{(1)} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j^{(1)} = \left(\delta_{i1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1^{(1)}$$

$$dx_i'^{(2)} = \left(\delta_{i2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) dx_2^{(2)}$$

Luego el producto escalar será

$$d\vec{r}'_1 \cdot d\vec{r}'_2 = dx_i'^{(1)} dx_i'^{(2)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1^{(1)} dx_2^{(2)} + \text{términos cuadráticos}$$

Resultando

$$d\vec{r}'_1 \cdot d\vec{r}'_2 \approx 2\varepsilon_{12} dx_1^{(1)} dx_2^{(2)}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el significado de las componentes diagonales

$$dl'_1 = (1 + \varepsilon_{11}) dx_1^{(1)} \quad dl'_2 = (1 + \varepsilon_{22}) dx_2^{(2)}$$

Llamando $(\pi/2 + \theta)$ al ángulo que forman los elementos después de la deformación, tenemos:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \frac{dx_i'^{(1)} dx_i'^{(2)}}{dl'_1 dl'_2} \approx 2\varepsilon_{12}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\varepsilon_{ij} \ll 1$. Como θ es un ángulo pequeño para deformaciones pequeñas podemos poner

$$\varepsilon_{12} \approx \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\frac{1}{2} \text{sen}(\theta) \approx -\frac{\theta}{2} \quad (\text{IV.8})$$

Luego ε_{12} es el decrecimiento que se produce, al deformarse el sólido, del ángulo que forman un elemento lineal de materia paralelo al eje x_1 y otro paralelo al eje x_2 . Entonces las componentes no diagonales del tensor de deformaciones ε_{ij} están relacionadas con deformaciones de cizalladura.

El tensor de deformaciones es simétrico y real; por lo tanto es diagonalizable. Pero al ser ε_{ij} , en general, diferente para distintos puntos del cuerpo, el sistema de ejes que diagonaliza el tensor en un punto, no lo hace, en muchos casos, para otros puntos.

Cuando el tensor de deformaciones está diagonalizado en un punto, usaremos la siguiente notación

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \quad (\text{IV.9})$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ son los valores principales del tensor de deformaciones.

Cuando el tensor es diagonal

$$\begin{aligned} (dl')^2 &= (1 + 2\varepsilon_1)(dx_1)^2 + (1 + 2\varepsilon_2)(dx_2)^2 + (1 + 2\varepsilon_3)(dx_3)^2 \\ &= (dx'_1)^2 + (dx'_2)^2 + (dx'_3)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Por lo tanto podemos poner, si no hay rotación

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} dx_1 \approx (1 + \varepsilon_1) dx_1 \\ dx'_2 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} dx_2 \approx (1 + \varepsilon_2) dx_2 \\ dx'_3 &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} dx_3 \approx (1 + \varepsilon_3) dx_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

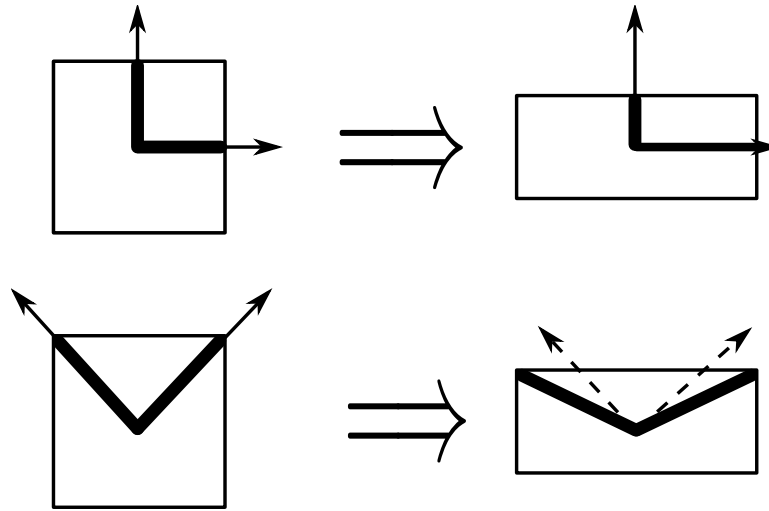
Vemos de (IV.10) que la distancia después de la deformación se puede poner como suma de tres términos independientes, lo que significa que la deformación en cualquier elemento de volumen se puede considerar como compuesta de simples alargamientos (o contracciones) en tres direcciones mutuamente perpendiculares (las de los ejes principales). Teniendo en cuenta (IV.11), el alargamiento relativo en estas tres direcciones está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx'_1 - dx_1}{dx_1} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1 \approx \varepsilon_1 \\ \frac{dx'_2 - dx_2}{dx_2} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1 \approx \varepsilon_2 \\ \frac{dx'_3 - dx_3}{dx_3} &= \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1 \approx \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

que está de acuerdo con el significado geométrico de los ε_{ij} .

Además las fibras materiales que tienen la dirección de los ejes principales antes de la deformación, siguen siendo ortogonales y, por lo tanto, no varía el ángulo entre ellas.

En la figura se compara la misma deformación vista en ejes principales y vista desde otro sistema de ejes; en este último se observa la variación angular entre los elementos lineales paralelos a los ejes.



Veamos ahora la variación del volumen de un elemento del cuerpo por la deformación. Usaremos para el cálculo los ejes principales

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

Como una rotación no modifica el volumen reemplazamos de (IV.11) los valores de dx'_i para pequeñas deformaciones

$$\begin{aligned} dV' &\approx (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\approx (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dV \end{aligned}$$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ es la traza del tensor ε_{ik} . Recordando que esta es un invariante se tendrá en cualquier sistema de coordenadas

$$dV' = dV(1 + \varepsilon_{ii}) \quad (\text{IV.13})$$

La variación relativa de volumen está dada por la traza de ε_{ij}

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{ii} \quad (\text{IV.14})$$

IV.2. Fuerzas volumétricas y superficiales – Tensiones internas – Tensor de tensiones

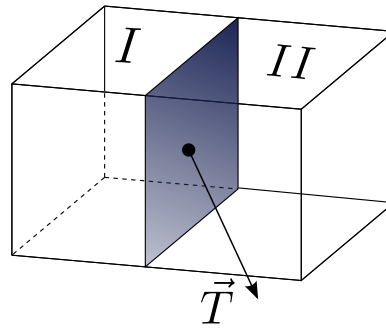
Es posible distinguir dos tipos de fuerza actuando en medios continuos: las fuerzas de largo alcance o volumétricas y las de corto alcance o superficiales. Entre las primeras está la fuerza de gravedad, que decrece lentamente al aumentar la distancia y que es

apreciable aún a grandes distancias. También están en este grupo las interacciones electromagnéticas si el cuerpo está cargado eléctricamente. Una consecuencia de la variación lenta de estas fuerzas es que actúan en forma igual sobre toda la materia de un elemento de volumen del medio continuo, y la fuerza total sobre dicho elemento de volumen es proporcional al tamaño del mismo. Por este motivo, a estas fuerzas se las llama también *fuerzas volumétricas*; llamaremos \vec{f} a la fuerza por unidad de volumen o densidad de fuerza volumétrica.

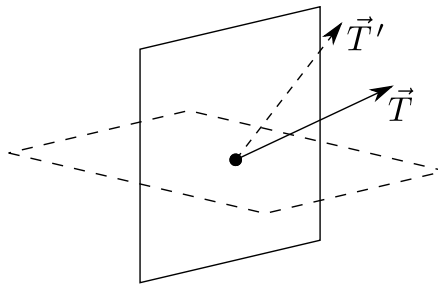
En el segundo grupo están las fuerzas de corto alcance, que tienen un origen molecular, que decaen extremadamente rápido con la distancia y son solo apreciables a distancias del orden de la distancia intermolecular típica de los sólidos (4×10^{-8} cm). Si dos elementos de materia adyacentes ejercen fuerzas de corto alcance uno sobre el otro, sólo actuarán sobre una capa muy fina adyacente a la superficie de separación, del orden del alcance de las fuerzas. Desde el punto de vista de la aproximación de medio continuo, este espesor es nulo; la fuerza total de un elemento sobre el otro será proporcional al área de la superficie de separación y no al volumen del elemento; por eso a estas fuerzas se las llama también *fuerzas superficiales*. Podemos definir la fuerza por unidad de superficie, llamada tensión \vec{T} .

Las fuerzas que mantienen unidas las distintas partes de un sólido provienen de la interacción molecular. Cuando el sólido está en un estado no deformado, el espaciado intermolecular está dado por el estado de equilibrio a la temperatura uniforme T_0 . Cuando ocurre una deformación, ya sea por acción de fuerzas externas o por variaciones térmicas, se cambia la distribución de las moléculas, apareciendo modificaciones de las fuerzas intermoleculares. Estas nuevas fuerzas internas debidas a la deformación del sólido, al ser de corto alcance, son fuerzas superficiales y dan lugar a *tensiones internas*.

Tenemos entonces que sobre todo elemento de materia del sólido deformable se ejercen fuerzas volumétricas que serán proporcionales a su volumen, y fuerzas superficiales producidas por interacción con los elementos de materia adyacentes que rodeen el primer elemento, y que serán proporcionales al área de la superficie de separación con los mismos. Por ejemplo, los elementos I y II con una superficie de contacto, la región II ejercerá sobre la I una fuerza que será igual al área de la superficie por la tensión \vec{T} ; ésta puede ser de tracción, de presión o de corte (o una combinación) ya sea que sea perpendicular a la superficie hacia afuera del volumen considerado (elemento I) o hacia adentro, o que sea tangencial a la superficie.



En general la tensión \vec{T} dependerá del punto del cuerpo en donde se esté, ya que la deformación no tiene por qué ser homogénea. Pero además dependerá de la superficie de separación entre los elementos de materia. Aunque se esté en el mismo punto del cuerpo, si se considera otra superficie orientada en forma distinta a la primera, lo que significa que se está haciendo una división distinta de los elementos de volumen, la tensión en general cambiará; esto se puede comprender del hecho que son otras moléculas las que intervienen en la interacción.



Para caracterizar la orientación de una superficie, tomaremos el versor \vec{n} normal a la misma, y cuyo sentido es saliente del elemento sobre el que actúa la tensión.

Si se desea conocer el estado de tensión de un cuerpo no será necesario dar la tensión en cada punto y para cualquier valor de \vec{n} , sino que bastará conocer, para cada punto del cuerpo, las tensiones a través de tres superficies, normales a los ejes x_1 , x_2 y x_3 . Mostraremos que a partir de éstas se puede calcular la tensión, en el mismo punto, a través de cualquier superficie.

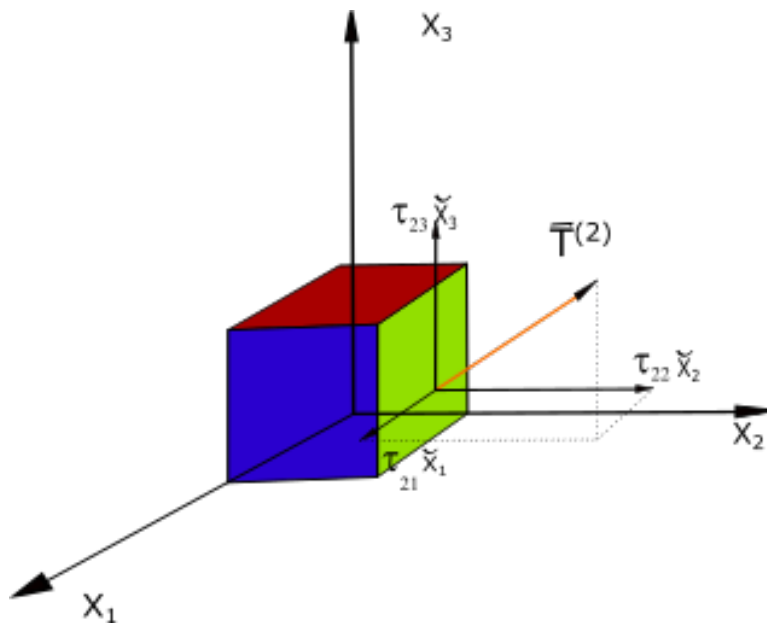
Consideremos un elemento de volumen con superficies límites perpendiculares a los ejes x_1 , x_2 y x_3 . Llamaremos $\vec{T}^{(1)}$ a la tensión transmitida a través de la superficie normal al eje x_1 , y τ_{11} , τ_{12} , τ_{13} a sus componentes, o sea

$$\vec{T}^{(1)} = \tau_{11}\check{x}_1 + \tau_{12}\check{x}_2 + \tau_{13}\check{x}_3 \quad (\text{IV.15a})$$

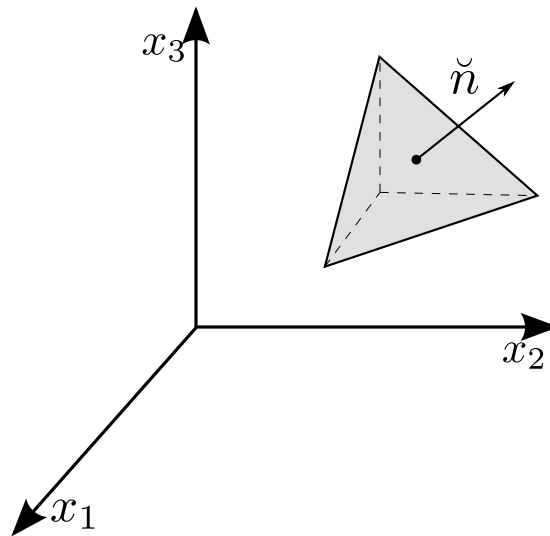
En forma similar definimos $\vec{T}^{(2)}$ y $\vec{T}^{(3)}$, tensiones transmitidas a través de las superficies cuyas normales son \check{x}_2 y \check{x}_3 , siendo

$$\vec{T}^{(2)} = \tau_{21}\check{x}_1 + \tau_{22}\check{x}_2 + \tau_{23}\check{x}_3 \quad (\text{IV.15b})$$

$$\vec{T}^{(3)} = \tau_{31}\check{x}_1 + \tau_{32}\check{x}_2 + \tau_{33}\check{x}_3 \quad (\text{IV.15c})$$



Como veremos más adelante, las nueve cantidades τ_{ij} son las componentes de un tensor de segundo rango, llamado tensor de tensiones.



Consideremos ahora un tetraedro como elemento de materia, con tres de las caras perpendiculares a los versores $-\check{x}_1$, $-\check{x}_2$ y $-\check{x}_3$, y la restante al versor \hat{n} . Llamaremos \vec{T} a la tensión a través de esta superficie; las tensiones que se ejercen sobre este elemento de volumen a través de las otras tres caras son $-\vec{T}^{(1)}$, $-\vec{T}^{(2)}$ y $-\vec{T}^{(3)}$; en esto último hemos tenido en cuenta el principio de acción y reacción. Además de las fuerzas superficiales habrá una fuerza volumétrica que designaremos como $\vec{f}V$ para indicar que es proporcional al volumen V del elemento considerado. Por otro lado la fuerza

total será igual al producto de la masa por la aceleración. Si ρ es la densidad de masa y $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ y $A^{(n)}$ las áreas de las caras perpendiculares a $-\check{x}_1$, $-\check{x}_2$, $-\check{x}_3$ y \check{n} , se tiene

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \rho V \vec{a} \\ A^{(1)} &= n_1 A^{(n)} \\ A^{(2)} &= n_2 A^{(n)} \\ A^{(3)} &= n_3 A^{(n)} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

siendo

$$\check{n} = n_1 \check{x}_1 + n_2 \check{x}_2 + n_3 \check{x}_3 \quad (\text{IV.17})$$

Por la segunda ley de Newton

$$\rho V \vec{a} = \vec{f} V + \vec{T} A^{(n)} - \vec{T}^{(1)} A^{(1)} - \vec{T}^{(2)} A^{(2)} - \vec{T}^{(3)} A^{(3)}$$

Usando las relaciones (IV.15) podemos poner

$$\begin{aligned} \rho V \vec{a} &= \vec{f} V + \vec{T} A^{(n)} - (\tau_{11} \check{x}_1 + \tau_{12} \check{x}_2 + \tau_{13} \check{x}_3) A^{(1)} - \\ &- (\tau_{21} \check{x}_1 + \tau_{22} \check{x}_2 + \tau_{23} \check{x}_3) A^{(2)} - (\tau_{31} \check{x}_1 + \tau_{32} \check{x}_2 + \tau_{33} \check{x}_3) A^{(3)} \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Hagamos tender a cero la altura del tetraedro, con lo que el volumen V tenderá a cero más rápidamente que las áreas $A^{(i)}$. En el límite de la ecuación (IV.18) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{T} A^{(n)} - (\tau_{11} \check{x}_1 + \tau_{12} \check{x}_2 + \tau_{13} \check{x}_3) A^{(1)} - (\tau_{21} \check{x}_1 + \tau_{22} \check{x}_2 + \tau_{23} \check{x}_3) A^{(2)} - \\ &- (\tau_{31} \check{x}_1 + \tau_{32} \check{x}_2 + \tau_{33} \check{x}_3) A^{(3)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (IV.16)

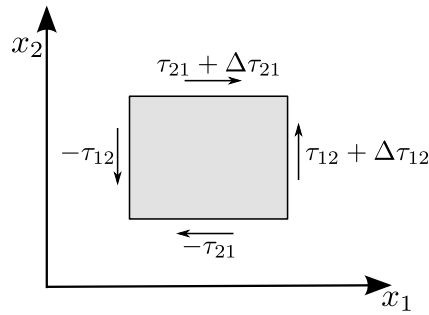
$$\begin{aligned} \vec{T} &= (\tau_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3) \check{x}_1 + (\tau_{12} n_1 + \tau_{22} n_2 + \tau_{32} n_3) \check{x}_2 + \\ &+ (\tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \tau_{33} n_3) \check{x}_3 \end{aligned}$$

o sea

$$T_i = \tau_{ji} n_j \quad (\text{IV.19})$$

El vector T_i es el producto contraído de τ_{ji} con el vector n_j . Luego τ_{ji} son las componentes de un tensor de 2º rango.

Estudiando la cupla ejercida sobre un elemento de materia se ve que en la mayoría de las situaciones el tensor de tensiones es simétrico. Supongamos en un punto cualquiera del cuerpo un elemento de volumen, el significado físico de τ_{12} y τ_{21} es el que se indica en la figura



Además de ser claro que producirán deformación de cizalladura, si $\tau_{12} \neq \tau_{21}$ existirá un torque sobre el elemento de materia que tendrá que ser compensado por un momento de fuerzas (respecto al centro del elemento) de origen externo; las fuerzas volumétricas se consideran uniformes dentro del elemento por lo que no pueden provocar un torque sobre el mismo. Solamente si existen momentos volumétricos, como los que producen campos magnéticos externos actuando en un medio magnetizado, puede $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$. Esta es una situación excepcional en elasticidad, por lo que supondremos que el tensor de tensiones es simétrico

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{IV.20}$$

En ese caso la tensión a través de una superficie pequeña de normal \vec{n} se puede poner también

$$T_i = \tau_{ij}n_j \tag{IV.21}$$

Para calcular la fuerza total sobre un volumen de cualquier dimensión debido a las tensiones existentes debemos calcular todas las tensiones a través de la superficie S que encierra el volumen

$$\vec{F} = \oiint_S \vec{T} \, dS \tag{IV.22}$$

ya que las tensiones entre elementos en el interior se cancelan de a pares. Además, la tensión \vec{T} puede ser distinta en distintos puntos de la superficie. Usando (IV.21), la i -ésima componente se puede poner

$$F_i = \oiint_S \tau_{ij}n_j \, dS$$

para un i fijo, tenemos el producto escalar de τ_{ij} con la normal a la superficie; podemos aplicar el teorema de Gauss, con lo que queda

$$F_i = \iiint_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \, dV \tag{IV.23}$$

La fuerza total debida a las tensiones se puede poner como una integral de volumen; el efecto de las tensiones es equivalente, desde el punto de vista de la fuerza neta, al

de una fuerza volumétrica de densidad \vec{f}' :

$$f'_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{IV.24})$$

Sólo habrá una fuerza total sobre todo el cuerpo si el tensor de tensiones no es uniforme; pero tengamos en cuenta que aunque sean uniformes la existencia de tensiones producirá deformaciones.

El momento total respecto al origen de coordenadas debido a las tensiones será:

$$N_i = \iint_S \varepsilon_{ijk} x_j T_k dS = \iint_S \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l dS$$

donde hemos usado (IV.21), y ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita. Usando el teorema de Gauss

$$N_i = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl}) dV = \iiint_V \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l} \tau_{kl} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dV$$

Pero

$$\varepsilon_{ijk} \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_l}}_{\delta_{jl}} \tau_{kl} = \varepsilon_{ijk} \tau_{kj}$$

se anula para tensores de tensión simétricos. En ese caso el momento total debido a las tensiones se puede poner (ver IV.24)

$$N_i = \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} dV = \iiint_V \varepsilon_{ijk} x_j f'_k dV \quad (\text{IV.25})$$

y queda expresado como el momento de la densidad de fuerza volumétrica equivalente, integrado sobre el volumen considerado.

Al ser simétrico y real, el tensor de tensiones es diagonalizable. En el sistema de ejes principales, las componentes τ_{ij} con $i \neq j$ son nulas. Si se consideran superficies perpendiculares a estos ejes habrá sólo tensiones normales a través de ellos y no tensiones de corte; estas tensiones normales que son las componentes $\tau_{11} = \tau_1$, $\tau_2 = \tau_2$, $\tau_{33} = \tau_3$, se llaman *tensiones principales*.

Los ejes que diagonalizan el tensor de tensiones en un punto pueden no hacerlo en otro punto del cuerpo. Sin embargo, hay situaciones, por ejemplo si hay alguna simetría en el problema, en que existe un sistema de ejes principales para todo el conjunto del cuerpo, aunque el tensor de tensiones no sea igual en ellos.

En el caso particular en el que las tres tensiones principales sean iguales, el tensor de tensiones es diagonal en cualquier sistema de coordenadas y por lo tanto la tensión es normal a través de cualquier superficie. Cuando esta tensión normal es una presión

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$$

se tiene una situación de presión hidrostática.

IV.3. Ecuación de equilibrio

Teniendo en cuenta las fuerzas volumétricas de densidad de fuerza \vec{f} y la relación (IV.24) la ecuación de equilibrio estático para cada elemento de materia es

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

Si se conocen las fuerzas externas volumétricas, esta es una ecuación diferencial de primer orden para el tensor de tensiones.

Las fuerzas externas aplicadas a la superficie del cuerpo, que son una de las causas usuales de la deformación, entran en el problema como condición de contorno para las soluciones de la ecuación de equilibrio (IV.26). Si $\vec{T}^{(ext)}$ es la fuerza externa por unidad de superficie aplicada en un punto de contorno del cuerpo, en dicho punto deberá ser

$$\tau_{ij} n_j = T_i^{(ext)} \quad (\text{IV.27})$$

donde \vec{n} es la normal saliente del cuerpo.

Calculemos el valor medio de las tensiones internas en un cuerpo en equilibrio. Multipliquemos (IV.26) por x_j e integremos sobre todo el volumen del sólido:

$$0 = \iiint_V \left(f_i x_j + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} x_j \right) dV = \iiint_V \left[f_i x_j + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} x_j) - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \tau_{ik} \right] dV$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}$ y transformando el segundo término en una integral de superficie podemos poner

$$\begin{aligned} \iiint_V \tau_{ij} dV &= \iiint_V f_i x_j dV + \oint_S \tau_{ik} x_j n_k dS \\ &= \iiint_V f_i x_j dV + \oint_S x_j T_i^{(ext)} dS \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

donde hemos tenido en cuenta la condición de contorno (IV.27), que es una relación entre el tensor de tensiones en la superficie del cuerpo y las tensiones externas. El primer miembro de (IV.28) es igual al volumen V por el valor medio buscado, $\bar{\tau}_{ij}$. Teniendo en cuenta que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ llegamos a la expresión

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{2V} \left[\iiint_V (f_i x_j + f_j x_i) dV + \oint_S (T_i^{(ext)} x_j + T_j^{(ext)} x_i) dS \right] \quad (\text{IV.29})$$

Vemos que el valor medio del tensor de tensiones en un sólido en equilibrio depende sólo de las fuerzas externas (volumétricas y aplicadas a la superficie exterior) y no es necesario resolver la ecuación de equilibrio para obtenerlo.

Cuando no hay equilibrio el vector desplazamiento \vec{u} de cada elemento de materia, además de ser función de las coordenadas, es función del tiempo, y su aceleración estará dada por

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{IV.30})$$

La ecuación de movimiento será

$$\begin{aligned} \rho a_i &= f_i + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \\ &\text{ó} \\ \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= f_i + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Esta ecuación está incompleta pues para poder resolverla es necesario encontrar una relación entre el vector desplazamiento \vec{u} y el tensor de tensiones. Esta se obtiene de la relación que veremos más adelante, entre el tensor de tensiones y el de deformaciones, ya que éste es una combinación de derivadas del vector desplazamiento.

IV.4. Trabajo necesario para deformar un cuerpo elástico

Para calcular el trabajo realizado en la deformación de un cuerpo, debemos considerar el trabajo de todas las fuerzas externas aplicadas menos aquel que se transforma en energía cinética.

Supongamos que el cuerpo tiene un cierto estado de deformación y que se modifica levemente su estado de forma tal que el vector desplazamiento pasa de \vec{u} a $\vec{u} + \delta\vec{u}$, o sea

$$u_i \longrightarrow u_i + \delta u_i$$

En ese proceso, el trabajo total realizado por el cuerpo es

$$\delta W_T = \iiint_V \vec{f} \cdot \delta\vec{u} \, dV + \iint_S \vec{T}^{(ext)} \cdot \delta\vec{u} \, dS$$

Teniendo en cuenta la ecuación de movimiento (IV.31) la variación de la energía cinética será

$$\delta E_{\text{cin}} = \iiint_V \left(\vec{f} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \check{x}_i \right) \cdot \delta\vec{u} \, dV$$

Por lo tanto el trabajo que se utiliza en la deformación del cuerpo será

$$\delta W_{\text{def}} = \delta W_T - \delta E_{\text{cin}} = \iint_S \vec{T}^{(ext)} \cdot \delta\vec{u} \, dS - \iiint_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i \, dV$$

Teniendo en cuenta (IV.27) y usando el teorema de la divergencia, resulta

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{def}} &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} \delta u_i) dV - \iiint_V \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i dV \\ &= \iiint_V \tau_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta u_i) dV \\ &= \iiint_V \tau_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dV\end{aligned}$$

donde tenemos en cuenta que podemos intercambiar la variación con la derivación. Usando la simetría del tensor de tensiones

$$\delta W_{\text{def}} = \iiint_V \tau_{ik} \frac{1}{2} \delta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] dV \quad (\text{IV.32})$$

Podemos concluir que para pequeñas deformaciones, el trabajo realizado en la deformación del cuerpo, por unidad de volumen, es

$$\delta w_{\text{def}} = \tau_{ik} \delta \varepsilon_{ik} \quad (\text{IV.33})$$

Este trabajo, si es positivo, aumenta la energía interna del cuerpo. En termodinámica se ve que si E es la energía interna de un sistema

$$dE = \delta Q - \delta W$$

donde δQ es el calor entregado al sistema y δW el trabajo realizado por el sistema. Si el proceso es reversible

$$dE = T dS - \delta W$$

donde S es la entropía del sistema y T la temperatura. Luego, teniendo en cuenta que en (IV.32) y (IV.33) se trata de trabajo realizado sobre el cuerpo, para un sólido elástico, en el rango de la elasticidad lineal, se tiene ante una variación $\delta \vec{u}$

$$\delta \epsilon = T \delta s + \tau_{ik} \delta \varepsilon_{ik} \quad (\text{IV.34})$$

donde ϵ y s son la energía interna y la entropía por unidad de volumen, respectivamente.

En el caso particular de presión hidrostática $\tau_{ik} = -p \delta_{ik}$ y resulta

$$\tau_{ik} \delta \varepsilon_{ik} = -p \delta_{ik} \delta \varepsilon_{ik} = -p \delta[\varepsilon_{ii}];$$

como la traza ε_{ii} es la variación relativa de volumen entre el estado deformado y sin deformar, y al estar trabajando con magnitudes por unidad de volumen, obtenemos para el trabajo realizado sobre el cuerpo el conocido resultado

$$\tau_{ik} \delta \varepsilon_{ik} = -p \delta v$$

o sea

$$\delta \epsilon = T \delta s - p \delta v \quad (\text{IV.35})$$

donde δv es la variación de un volumen unitario.

IV.5. Relación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones: Ley de Hooke generalizada

Si un sólido elástico se deforma bajo la acción de fuerzas externas, al desaparecer estas la deformación desaparece. Un cuerpo elástico se puede definir entonces como uno en el que las tensiones dependen sólo de las deformaciones y no de la historia de esas deformaciones. Un cambio de temperatura puede producir deformaciones aunque no haya tensiones; supondremos, por el momento, que la deformación se produce a temperatura constante y que ésta es uniforme en todo el cuerpo.

Si la relación entre tensiones y deformaciones es lineal, estamos en el rango de la elasticidad lineal. La relación lineal más general entre dos tensores de segundo rango está dada por un tensor de 4^{to} rango mediante un producto con doble contracción

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{IV.36})$$

Los elementos C_{ijkl} pueden depender del punto del cuerpo si este no es homogéneo, pero no dependerán de la deformación, ya que hemos supuesto una relación lineal. Esta es una generalización de la ley de Hooke simple por la que el estiramiento de un alambre es una constante por la tensión aplicada y por ello la ecuación (IV.36) se conoce a veces como ley de Hooke generalizada.

En un cuerpo cristalino las propiedades elásticas dependen de la dirección. Sin embargo muchos sólidos, en particular los metales, son policristalinos, con granos cristalinos lo suficientemente pequeños y orientados en forma aleatoria, de modo que las propiedades elásticas, promediadas sobre varios granos, son esencialmente independientes de la dirección y se puede considerar al sólido como isotrópico.

Supondremos entonces cuerpos elásticos isotrópicos. Eso implica que la relación entre el tensor de deformaciones y de tensiones no puede depender de la orientación de los ejes elegidos como sistema de coordenadas. Por lo tanto los valores numéricos de las distintas componentes C_{ijkl} tienen que ser los mismos en cualquier sistema de coordenadas, o sea, deben ser las componentes de un tensor de cuarto rango isotrópico. Entonces, según lo visto en (II.44), se podrá poner

$$C_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{IV.37})$$

Reemplazando en (IV.36) resulta, para sólidos isotrópicos, la siguiente relación entre tensor de tensiones y tensor de deformaciones

$$\tau_{ij} = \alpha \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \beta \varepsilon_{ij} + \gamma \varepsilon_{ji}$$

Teniendo en cuenta la simetría del tensor de deformaciones y renombrando las constantes llegamos finalmente a

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (\text{IV.38})$$

Los coeficientes μ y λ se conocen como *constantes de Lamé*.

Podemos encontrar fácilmente la relación inversa entre tensores. Haciendo $j = i$ y sumando sobre i en (IV.38) se tiene

$$\tau_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + 3\lambda\varepsilon_{kk} = (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_{kk}$$

reemplazando en (IV.38)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} \tau_{kk} \right] \quad (\text{IV.39})$$

Una consecuencia importante de las relaciones (IV.38) ó (IV.39) es que los ejes principales del tensor de deformaciones coinciden con los ejes principales del tensor de tensiones.

Consideraremos diferentes situaciones físicas en las que podemos definir constantes elásticas de claro significado, y las relacionaremos con las constantes de Lamé.

- a) Presión hidrostática: si sólo se comprime el cuerpo y en forma igual en las tres direcciones $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$, el cuerpo disminuye su volumen; la variación relativa del mismo está dada por ε_{ii} . Se define módulo de compresión hidrostática κ al cociente de p sobre la disminución relativa de volumen, o sea

$$\kappa = \frac{p}{-\varepsilon_{ii}}$$

De (IV.38)

$$\tau_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + 3\lambda\varepsilon_{ii} = (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_{ii}$$

en este caso $\tau_{ii} = -3p$, por lo que

$$-3p = (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_{ii}$$

Luego la relación entre el módulo de compresión hidrostática y las constantes de Lamé es

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (\text{IV.40})$$

- b) Tensión pura unidireccional: $\tau_{11} = T$ y los demás τ_{ij} nulos. En este caso, si $T > 0$, habrá elongación en la dirección x_1 y, en general, contracción en las otras dos direcciones. Se definen dos coeficientes: el módulo elástico o módulo de Young y el coeficiente de Poisson. El módulo de Young E es el cociente entre la tensión y el alargamiento relativo en la dirección de la tensión, o sea

$$E = \frac{\tau_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \quad (\text{IV.41})$$

El coeficiente de Poisson σ es el cociente de la contracción lateral y la elongación en la dirección de la tensión, o sea

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{IV.42})$$

- c) Corte puro: la única componente no nula de τ_{ij} es $\tau_{12} = \tau_{21}$. El cociente entre la tensión de corte y la disminución del ángulo se define como módulo de corte o módulo de rigidez G

$$G = \frac{\tau_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \mu \quad (\text{IV.43})$$

El módulo de rigidez resulta igual a la constante de Lamé μ .

Para que un sólido pase de un estado sin deformar a uno deformado hay que realizar trabajo sobre él; teniendo en cuenta (IV.33), para que este trabajo sea positivo en los diferentes casos mencionados debe ser

$$\kappa > 0 \quad E > 0 \quad \mu > 0 \quad (\text{IV.44})$$

Por lo tanto, de la relación entre constantes, debe ser

$$E = 2\mu(1 + \sigma) = 3\kappa(1 - 2\sigma) \implies -1 < \sigma < \frac{1}{2}$$

$$\kappa = \frac{\lambda(1 + \sigma)}{3\sigma} \implies \frac{\lambda}{\sigma} > 0 \quad (\text{IV.45})$$

aunque para prácticamente todos los medios elásticos $\sigma > 0$.

IV.6. Deformación con cambio de temperatura

Un cuerpo sólido, al aumentar su temperatura, se dilata. Si lo hace libremente, no aparecerán tensiones y, para un medio isotrópico, la dilatación será igual en las tres direcciones. Si llamamos α al coeficiente de expansión térmica, el cambio relativo de volumen, dado por la traza ε_{ii} es

$$\varepsilon_{ii} = \alpha(T - T_0) \quad (\text{IV.46})$$

y el tensor de deformaciones será

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\alpha}{3}(T - T_0)\delta_{ij} \quad (\text{IV.47})$$

Si el sólido se deforma tanto por la presencia de tensiones como de cambio térmico, teniendo en cuenta (IV.39)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\alpha}{3}(T - T_0)\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \tau_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (\text{IV.48})$$

de aquí podemos obtener la relación inversa

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (T - T_0)\delta_{ij} \quad (\text{IV.49})$$

que se puede poner también

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha\kappa(T - T_0)\delta_{ij} \quad (\text{IV.50})$$

Las constantes elásticas que definimos en la sección anterior son isotérmicas, ya que supusimos que la deformación se realizaba a temperatura constante. Si la deformación se produce de tal modo que no haya intercambio de calor entre el sólido y el exterior y entre distintas partes del cuerpo, diremos que es una deformación adiabática. Para deformar un cuerpo elástico hay que realizar trabajo sobre él, si esto se hace en forma adiabática y reversible, la entropía no cambia, y el trabajo se transforma en un aumento de energía interna (ver IV.34) y por lo tanto de la temperatura del cuerpo. Si se calcula $(T - T_0)$ en función de la deformación, se puede reemplazar en (IV.50) y poner el tensor de tensiones sólo en función del tensor de deformaciones de la forma

$$\tau_{ij} = 2\mu_{\text{ad}}\varepsilon_{ij} + \left(\kappa_{\text{ad}} - \frac{2}{3}\mu_{\text{ad}}\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{IV.51})$$

Usando relaciones termodinámicas se pueden obtener relaciones entre las constantes adiabáticas y las isotérmicas

$$\frac{1}{\kappa_{\text{ad}}} = \frac{1}{\kappa_{\text{is}}} + \frac{T\alpha^2}{c_p} \quad \mu_{\text{ad}} = \mu_{\text{is}} \quad (\text{IV.52})$$

donde c_p es el calor específico por unidad de volumen a presión constante. A partir de estas ecuaciones se pueden encontrar las relaciones entre λ_{ad} , σ_{ad} y E_{ad} , y las correspondientes constantes isotérmicas.

IV.7. Ecuación de movimiento y ecuación de equilibrio para el vector desplazamiento

Vimos que en el caso dependiente del tiempo en la relación entre tensor de tensiones, densidad de fuerza volumétrica y aceleración del elemento de materia, dada por

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

era necesario incorporar una relación entre el tensor de tensiones y el vector desplazamiento. De la ley de Hooke (IV.38) podemos poner

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ij}$$

Reemplazando la expresión de ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ij} \\ &= \mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\end{aligned}$$

Luego la ecuación de movimiento de un elemento de materia del sólido es

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (\text{IV.53})$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$$

podemos poner también

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{f} + (2\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (\text{IV.54})$$

Esta ecuación se escribe a veces usando otro par de constantes elásticas.

En el caso estático, de (IV.54) podemos obtener la ecuación que debe satisfacer el desplazamiento \vec{u} en el equilibrio

$$(2\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + \vec{f} = 0 \quad (\text{IV.55})$$

que, puesto en función de E y σ se escribe

$$2(1 - \sigma) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + \frac{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{E} \vec{f} = 0 \quad (\text{IV.56})$$

En muchas ocasiones la fuerza volumétrica se puede despreciar y la deformación es producida por las tensiones externas aplicadas a la superficie del sólido. En ese caso \vec{u} satisface

$$2(1 - \sigma) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (1 - 2\sigma) \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0 \quad (\text{IV.57})$$

la única constante que interviene es el coeficiente de Poisson.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

para todo vector \vec{A} , tomando divergencia de (IV.57) se llega a

$$\nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0 \quad (\text{IV.58})$$

Por lo tanto, en este caso, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ satisface la ecuación de Laplace, o sea que es una función armónica. $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ es el cambio de volumen por unidad de volumen, ya que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii} \quad (\text{IV.59})$$

El resultado de que el cambio de volumen por unidad de volumen es una función armónica se mantiene si hay fuerzas volumétricas si estas son uniformes.

Volviendo al caso general, tanto en (IV.53), (IV.54) como en (IV.55) ó (IV.56) las constantes elásticas serán las isotérmicas o las adiabáticas si estamos en alguna de las dos situaciones. Pero si la temperatura no es uniforme a lo largo del cuerpo, y esta falta de uniformidad no se debe a un proceso adiabático, las constantes elásticas a usar serán las isotérmicas, pero habrá que agregar un término a la ecuación; este proviene del término adicional en la tensión τ_{ij} (ver IV.49)

$$-\alpha \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (T - T_0) \delta_{ij}$$

La ecuación de movimiento para el elemento de materia queda

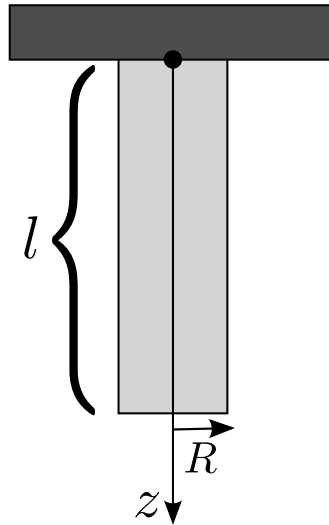
$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{f} + (2\mu + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \alpha \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} T \quad (\text{IV.60})$$

IV.8. Ejemplos de cuerpos elásticos en equilibrio: cálculo de τ_{ij} , ε_{ij} y \vec{u} .

En situaciones en que se puede suponer que la deformación es homogénea, la obtención de los tensores de tensiones y deformaciones, y el vector desplazamiento, es simple. Dentro de este tipo de problemas podemos considerar una barra que sufre un estiramiento, o una barra que es comprimida en los extremos pero cuyos lados están fijos y por lo tanto no puede haber deformación lateral. Dejaremos su resolución como ejercicio.

Veremos otros dos ejemplos: una barra cilíndrica muy delgada que cuelga de uno de sus extremos, y una esfera hueca sometida a presiones diferentes en el interior y en el exterior. La resolución exacta del segundo problema es simple, pero, para el primero, resolverla en forma exacta es complejo, por lo que haremos aproximaciones basadas en que la barra es delgada y el problema tiene simetría.

Deformación de una barra cilíndrica delgada que cuelga de un extremo



Consideremos una barra cilíndrica muy delgada de longitud l y radio R ($l \gg R$) que cuelga de uno de sus extremos en forma vertical. Tomemos el eje z coincidiendo con el eje del cilindro y apuntando hacia abajo. El extremo en que está suspendida la barra está en $z = 0$, y la tensión externa en esa superficie es normal; las demás superficies son libres. Teniendo en cuenta que las tensiones externas no generan tensiones de corte en la superficie de la barra, y dada la simetría de problema, en todos los puntos del eje de la barra ($x = 0, y = 0$), el eje z será un eje principal, los otros dos serán cualquier par de ejes perpendiculares a z , que llamaremos x e y . En estos puntos será

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{xx} = \tau_{yy} &\end{aligned}\tag{IV.61}$$

Esto que es cierto en puntos del eje del cilindro, lo supondremos válido en cualquier punto del mismo, aproximación que será mejor cuanto más delgado sea el cilindro.

Usaremos coordenadas cartesianas, pero tendremos en cuenta la simetría. La ecuación de equilibrio es

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

siendo $\vec{f} = \rho g \hat{z}$, o sea

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g &= 0\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la aproximación supuesta en (IV.61) nos queda

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g &= 0\end{aligned}\tag{IV.62}$$

Integrando resulta

$$\begin{aligned}\tau_{xx} = \tau_{yy} &= \alpha(z) \\ \tau_{zz} &= -\rho g z + \beta(x, y)\end{aligned}\tag{IV.63}$$

Por otro lado, las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned}\bullet \quad u_z(z=0) &= 0 \\ \bullet \quad \vec{T}^{(ext)} &= -|\vec{T}| \hat{z} \quad (\text{en } z=0)\end{aligned}\tag{IV.64}$$

De la relación

$$T_i^{(ext)} = \tau_{ij} n_j$$

donde \hat{n} es la normal saliente del cuerpo, teniendo en cuenta que en este caso $\hat{n} = (0, 0, -1)$, resulta

$$T_x^{(ext)} = \tau_{xx} \underbrace{n_x}_0 + \tau_{xy} \underbrace{n_y}_0 + \tau_{xz} n_z$$

o sea

$$-\tau_{xz} = 0$$

$$0 = T_y^{(ext)} = \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z = -\tau_{yz}$$

$$-|\vec{T}| = T_z^{(ext)} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \tau_{zz} n_z = -\tau_{zz}$$

Resumiendo, en $z = 0$ debe ser

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zz} = |\vec{T}| \quad (\text{IV.65})$$

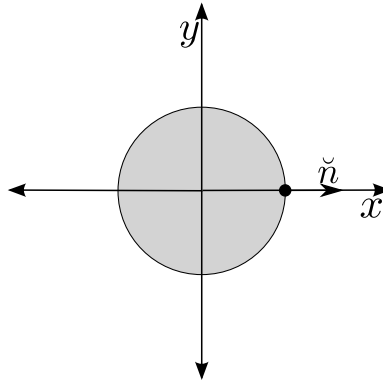
pero \vec{T} es una incógnita.

- $\vec{T}^{(ext)} = 0$ en $z = l$

En este caso $\check{n} = (0, 0, 1)$ Luego, de $T_i^{(ext)} = \tau_{ij}n_j$ resulta

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0 \quad \text{en } z = l \quad (\text{IV.66})$$

- $\vec{T}^{(ext)}$ en la superficie lateral $r = R$



Dada la simetría, bastará considerar los puntos sobre el contorno de coordenadas $(R, 0, z)$; allí $\check{n} = (1, 0, 0)$

$$T_1^{(ext)} = \tau_{1j}n_j = \tau_{11} = 0$$

$$T_2^{(ext)} = \tau_{2j}n_j = \tau_{21} = 0$$

$$T_3^{(ext)} = \tau_{3j}n_j = \tau_{31} = 0$$

Por simetría, el resultado será válido en toda la superficie lateral

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad 0 \leq z \leq l \quad (\text{IV.67})$$

Aplicando las condiciones de contorno en (IV.63) tendremos

$$\alpha(z) = 0 \quad \text{de (IV.67)}$$

$$\beta(x, y) = \rho gl \quad \text{de (IV.66)}$$

Luego, para cualquier punto de la barra

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \tau_{yy} = 0 \\ \tau_{zz} &= \rho g(l - z)\end{aligned}\quad (\text{IV.68})$$

Utilizando la ley de Hooke podemos obtener el tensor de deformaciones, las componentes que hemos supuesto no nulas dan

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z) \quad (\text{IV.69a})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z) \quad (\text{IV.69b})$$

De la relación del tensor de deformaciones con las derivadas del vector desplazamiento se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z) \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z)\end{aligned}\quad (\text{IV.70})$$

Integrando (IV.70) resulta

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z)x + g_1(y, z) \\ u_y &= \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z)y + g_2(x, z) \\ u_z &= \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + g_3(x, y)\end{aligned}\quad (\text{IV.71})$$

Teniendo en cuenta que la barra no rota, $u_\varphi = 0$ y por lo tanto $\frac{u_x}{x} = \frac{u_y}{y}$; los únicos valores de g_1 y g_2 que no divergen en $y = 0$ ó $x = 0$ son $g_1 = g_2 = 0$. Por otro lado, de la condición (IV.64) se obtiene $g_3 = 0$. La solución para el desplazamiento con las aproximaciones hechas queda

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z)x \\ u_y &= \frac{-\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g(l - z)y \\ u_z &= \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \rho g \left(lz - \frac{z^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.72})$$

Observemos que con esta solución, ε_{xz} y ε_{yz} son no nulos, contradiciendo (IV.61). Pero son nulos sobre el eje z , y fuera del eje son muy pequeños, pues consideramos una barra muy delgada, y se pueden despreciar dentro de la aproximación que hicimos ($\tau_{ij} = 0$ para $i \neq j$). Si la barra es más ancha, hay que tener en cuenta que τ_{xz} y τ_{yz} pueden ser no nulos, y la solución se hace más compleja.

Deformación de una esfera hueca por diferencia de presión

Consideremos ahora una esfera hueca, de radio interno R_1 y radio externo R_2 , con una presión p_1 en su interior y una presión p_2 en el exterior. Despreciemos la gravedad.

Usaremos coordenadas esféricas, con el origen en el centro de la esfera. Por simetría, el vector desplazamiento tendrá sólo componente radial u_r . Como no hay fuerzas volumétricas podemos usar la ecuación (IV.57). Al haber sólo componente radial \vec{u} , y depender sólo de \vec{r} ,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$$

y la ecuación se reduce a

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Integrando, y teniendo en cuenta la expresión de la divergencia en esféricas se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) = \text{constante} = 3a$$

Integrando nuevamente la única componente no nula de \vec{u} es:

$$u_r = ar + \frac{b}{r^2}$$

A partir de esta ecuación podemos obtener (ver [Apéndice B.2](#))

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = a - \frac{2b}{r^3}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3} = \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

y las demás componentes nulas. La componente τ_{rr} se puede obtener de (IV.38):

$$\tau_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}] = (2\mu + 3\lambda)a - \frac{4\mu b}{r^3}$$

Las constantes a y b se determinan de las condiciones de contorno $\tau_{rr}(R_1) = -p_1$, $\tau_{rr}(R_2) = -p_2$

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{(2\mu + 3\lambda) [R_2^3 - R_1^3]} \quad b = \frac{p_1 - p_2}{4\mu} \frac{R_2^3 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

Luego

$$\tau_{rr} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{(p_1 - p_2) R_2^3 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1}{r^3}$$

De la misma forma se obtiene

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} + 2 \frac{(p_1 - p_2) R_2^3 R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1}{r^3}$$

Capítulo V

Propagación de ondas – Ondas elásticas

V.1. Deformaciones dependientes del tiempo: caso unidireccional

Consideremos un sólido elástico isotrópico y homogéneo y supongamos que se extiende infinitamente. Analizaremos deformaciones dependientes del tiempo despreciando las fuerzas volumétricas. Además, dado que en general la transferencia de calor por conducción entre distintas partes del sólido es lenta, y que en muchos casos el calor transmitido durante el tiempo característico de variación de la deformación es despreciable, usaremos la aproximación adiabática. En lo que sigue, las constantes elásticas que se utilicen serán las adiabáticas.

Supongamos ahora que la deformación del sólido es tal que el vector desplazamiento \vec{u} depende sólo del tiempo y de una única coordenada espacial, por ejemplo, x_1 . Supongamos además que \vec{u} sólo tiene componente en esa dirección, o sea

$$\vec{u} = u_1(x_1, t)\vec{x}_1 \quad (\text{V.1})$$

Esta suposición la podemos hacer ya que tanto $\nabla^2 \vec{u}$ como $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$ tienen sólo componente x_1 . Por lo tanto, de (IV.53)

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0$$

y la única componente no nula satisface

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (\text{V.2})$$

Luego el desplazamiento es solución de una ecuación de onda unidimensional de la forma

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.3})$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda. En este caso toma el valor

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad (\text{V.4})$$

Supongamos ahora que la deformación tiene sólo componente u_2 y que depende sólo del tiempo y de x_1

$$\vec{u} = u_2(x_1, t)\check{x}_2 \quad (\text{V.5})$$

Nuevamente esto es posible ya que en este caso $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, y $\nabla^2 \vec{u}$ tiene sólo componente en la dirección x_2 y, usando (IV.53)

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0$$

La única componente no nula satisface

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = 0 \quad (\text{V.6})$$

Vemos que también en este caso la deformación satisface una ecuación de onda, pero con una velocidad de propagación distinta

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{V.7})$$

V.1.1. Ecuación de onda unidimensional: solución general

Busquemos las soluciones de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 f(x_1, t)}{\partial x_1^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x_1, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.3})$$

Observemos que una función cualquiera de x_1, t , pero tal que su dependencia en estas variables aparezca únicamente en la combinación $x_1 - vt$ o en la combinación $x_1 + vt$, será solución de (V.3). Para verlo hagamos

$$f(x_1, t) = F(x_1 \pm vt) \quad (\text{V.8})$$

será

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = F' \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \pm v F'$$

donde la prima indica derivación respecto al argumento de F .

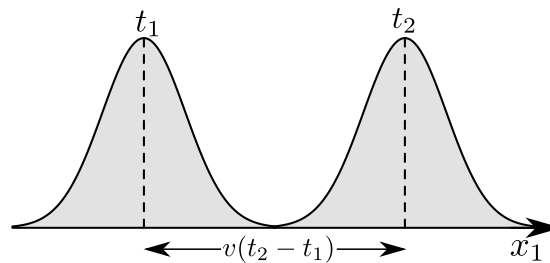
Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{1}{v^2} v^2\right) F'' = 0$$

o sea que (V.8) es solución de la ecuación de onda. Como esta es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es solución. La solución general de la ecuación de ondas unidimensional estará entonces dada por

$$f(x_1, t) = A_1 F_1(x_1 - vt) + A_2 F_2(x_1 + vt) \quad (\text{V.9})$$

Observemos que la onda mantiene su forma pero viaja en el sentido positivo del eje x según que la dependencia sea en $x_1 - vt$ ó $x_1 + vt$. $F_1(x_1 - vt)$ es una onda que se propaga en la dirección x_1 , con velocidad v .

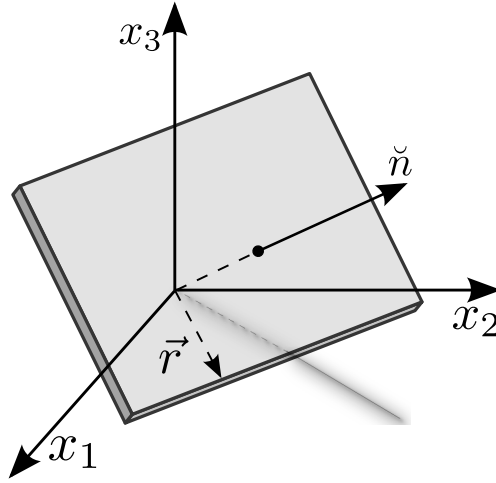


V.2. Ecuación de onda tridimensional – Ondas planas homogéneas – Ondas monocromáticas – Solución general

Muchos fenómenos físicos tienen comportamiento ondulatorio por lo que las magnitudes que los representan obedecen la ecuación de onda

$$\nabla^2 f(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.10})$$

Algunas veces lo hacen en forma exacta, como los campos electromagnéticos en el vacío; en ese caso $v = c$, velocidad de la luz. Otras en forma aproximada cuando se linealizan las ecuaciones, suponiendo pequeños apartamientos de un estado de equilibrio, como es el caso de las ondas sonoras. En los cuerpos elásticos ya se hizo la aproximación al suponer deformaciones pequeñas y linealizar el tensor de deformaciones.



La variedad de soluciones posibles en el caso tridimensional es mucho mayor que en el caso unidimensional. Nos restringiremos por el momento a las ondas planas homogéneas, entendiendo por tales a aquellas en las que la magnitud f toma el mismo valor sobre los puntos de cualquier plano perpendicular a una dada dirección, y varía, por lo tanto, sólo en esa dirección. Sea \tilde{n} la normal a esos planos. Un punto de uno de los planos satisface

$$\vec{r} \cdot \tilde{n} = cte \quad (\text{V.11})$$

Llamando

$$\xi = \vec{r} \cdot \tilde{n} \quad (\text{V.12})$$

tendremos que si la onda es plana y homogénea f sólo dependerá de ξ y de t , y no de las variables sobre el plano, reduciéndose al problema unidimensional. Luego, la solución general para ondas planas homogéneas es

$$f(\vec{r}, t) = A_1 F_1(\vec{r} \cdot \tilde{n} - vt) + A_2 F_2(\vec{r} \cdot \tilde{n} + vt) \quad (\text{V.13})$$

estas ondas se propagan en dirección normal al plano con velocidad v ; F_1 corresponde a la propagación en sentido \tilde{n} y F_2 al sentido de $-\tilde{n}$.

Como una función F se puede desarrollar en una integral de Fourier

$$F(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ik\eta} dk \quad (\text{V.14})$$

con

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) e^{-ik\eta} d\eta \quad (\text{V.15})$$

podemos poner para una onda plana homogénea, con planos de amplitud constante perpendiculares a \tilde{n}

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_1(k) e^{ik(\vec{r} \cdot \tilde{n} - vt)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} C_2(k) e^{ik(\vec{r} \cdot \tilde{n} + vt)} dk \quad (\text{V.16})$$

Una onda plana homogénea se puede poner por lo tanto como suma de ondas monocromáticas (o sea, de frecuencia definida) planas propagándose en la misma dirección \vec{n}

$$f_k(\vec{r}, t) = C(k)e^{ik(\vec{r}\cdot\vec{n}-vt)} = C(k)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (\text{V.17})$$

donde hemos definido el vector de onda \vec{k} y la frecuencia angular ω como

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k\vec{n} \\ \omega &= kv \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

Además, la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/k$.

Las magnitudes físicas se obtendrán tomando la parte real de (V.17).

Las ondas dadas por (V.17) son un caso particular de ondas monocromáticas, o sea, aquellas en las que la dependencia temporal es armónica, con frecuencia definida.

$$f(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[f(\vec{r})e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{V.19})$$

La parte espacial, que puede ser compleja, deberá satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{v^2} f(\vec{r}) = 0 \quad (\text{V.20})$$

Para obtener la solución general en un espacio ilimitado de la ecuación de onda tridimensional (V.10), se deben sumar ondas planas monocromáticas sobre todos los valores de $|\vec{k}|$ y sobre todas las direcciones posibles, o sea, hacer una integral de Fourier triple

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^+(k_1, k_2, k_3) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^-(k_1, k_2, k_3) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} dk_1 dk_2 dk_3 \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

con $\omega > 0$; $\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$ que se obtiene de que cada término debe satisfacer

$$\nabla^2 f_k - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0$$

por lo que debe cumplirse

$$-(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + \frac{1}{v^2} \omega^2 = 0 \quad (\text{V.22})$$

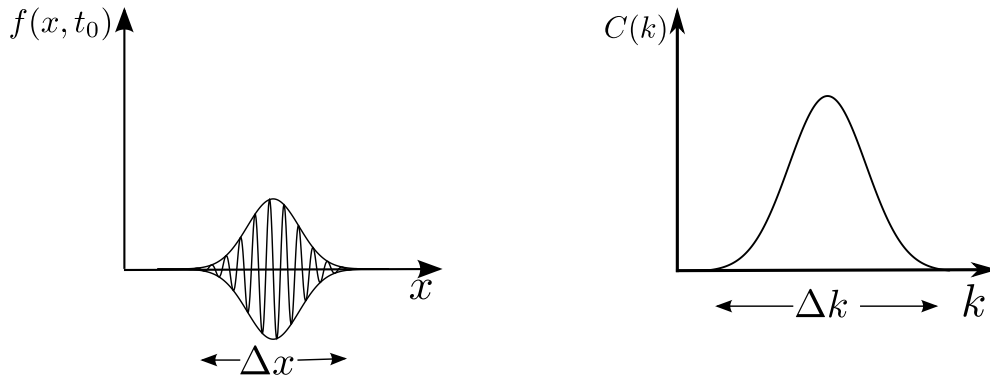
En general la relación entre \vec{k} y ω se llama relación de dispersión; en este caso de v constante, no hay dispersión.

Si f es una magnitud física, C^+ y C^- deberán cumplir relaciones que aseguren que f sea real.

Una onda plana monocromática es distinta de cero en casi todo punto del espacio. Si se tiene una perturbación no nula sólo en una región es necesario sumar ondas planas como en (V.21), y se tendrá lo que se llama un paquete de ondas. Por ejemplo, en el caso unidimensional, si se tiene un paquete que viaja en sentido positivo de x

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk; \quad \omega = kv \quad (\text{V.23})$$

si llamamos Δx al ancho aproximado del paquete, $C(k)$ tendrá un ancho $\Delta k \propto 1/\Delta x$, o sea, cuanto más angosto sea el paquete, más longitudes de onda serán necesarias para representarlo como suma de ondas planas monocromáticas



Dijimos que $\omega = kv$; pero hay fenómenos físicos en que v es una función de k , o sea, de la frecuencia, y no es como hemos supuesto hasta ahora en que v era constante, y habrá dispersión. Si $v = v(k)$, la solución dada en (V.9) no es válida, pero sí la solución monocromática y también (V.23) con el $\omega(k)$ que corresponda.

Además de poder ser v función de k , en ocasiones lo que multiplica a $\omega^2 f$ en la ecuación (V.20) es una magnitud compleja; eso trae aparejado difusión de la onda, tema que no analizaremos en este curso.

V.3. Velocidad de fase y velocidad de grupo

La velocidad de fase de una onda monocromática plana está definida como la velocidad con que viajan los planos de fase constante, o sea, suponiendo v real, los planos (ver V.17)

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = cte \quad (\text{V.24})$$

Usando la variable $\xi = \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{k}/k$, la ecuación (V.24) se puede escribir

$$k\xi - \omega t = cte$$

Luego, la velocidad de fase es

$$v_f = \frac{\omega}{k} = v \quad (\text{V.25})$$

Si v es una constante independiente de la longitud de onda, ésta será también la velocidad de cualquier paquete. Sin embargo, en muchas ocasiones, por ejemplo, las ondas electromagnéticas en dieléctricos, v depende de k . En estos casos, se define la velocidad de grupo v_g , que es más representativa de la velocidad del paquete.

Analizaremos el caso unidimensional; consideremos un paquete constituido por ondas de un rango estrecho de frecuencias alrededor de una frecuencia ω_0 , o sea, alrededor de un k_0

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (\text{V.26})$$

Desarrollamos $\omega(k)$ alrededor del k_0 central del paquete

$$\omega = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

podemos poner

$$(kx - \omega t) = \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k_0 - \omega_0 \right) t + k \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) + \dots$$

Reemplazando en (V.26), despreciando términos de orden superior en $k - k_0$, resulta

$$f(x, t) = e^{i \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k_0 - \omega_0 \right) t} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ik \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right)} dk \quad (\text{V.27})$$

Vemos que el paquete de ondas $f(x, t)$, a parte de un factor de fase

$$e^{i \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k_0 - \omega_0 \right) t}$$

es función de

$$x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t$$

por lo que se mueve con una velocidad llamada velocidad de grupo

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (\text{V.28})$$

De (V.18), si v no depende de k

$$v_g = v_f = v$$

V.4. Ondas en medios elásticos – Caso general

Consideremos un medio infinito, isótropo y homogéneo. Supongamos, además, que no hay fuerzas volumétricas.

Vimos en dos situaciones particulares diferentes que el vector desplazamiento obedecía a ecuaciones de onda. En la primera considerada el vector desplazamiento tenía la dirección de la propagación, o sea, era una onda longitudinal, y se propagaba con velocidad v_l (ver V.4) que llamaremos v_l

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} \quad (\text{V.29})$$

En el segundo caso considerado el desplazamiento era perpendicular a la dirección de propagación, o sea, era una onda transversal. Su velocidad de propagación estaba dada por v_t (ver V.7), que llamaremos v_t

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{V.30})$$

Veremos que en el caso general podemos separar el vector desplazamiento en dos términos, uno de ellos obedeciendo una ecuación de onda con velocidad de propagación v_l , y el otro a una ecuación de onda con velocidad de propagación v_t . Para demostrarlo, haremos uso del resultado matemático que establece que cualquier función vectorial se puede poner como la suma de un término solenoidal, o sea, de divergencia nula, y uno irrotacional.

Reescribamos la ecuación de movimiento (IV.54) usando las velocidades v_l y v_t

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = v_l^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - v_t^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad (\text{V.31})$$

Poniendo el vector desplazamiento como suma de una parte irrotacional y una parte solenoidal

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t \quad (\text{V.32})$$

donde

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}_l = 0 \quad (\text{V.33})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0 \quad (\text{V.34})$$

se llega a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{u}_l + \vec{u}_t) = v_l^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l) - v_t^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_t) \quad (\text{V.35})$$

Teniendo en cuenta que tanto el rotor de un gradiente como la divergencia de un rotor son idénticamente nulos, igualando entre sí los términos de (V.35) que tienen rotor

nulo, y entre sí los que tienen divergencia nula, resultan dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = v_l^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_l) \quad (\text{V.36})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = -v_t^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}_t) \quad (\text{V.37})$$

Teniendo en cuenta la relación vectorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$$

se ve que los desplazamientos \vec{u}_l y \vec{u}_t satisfacen sendas ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \vec{u}_l - \frac{1}{v_l^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.38})$$

$$\nabla^2 \vec{u}_t - \frac{1}{v_t^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.39})$$

La onda \vec{u}_l se propaga con velocidad v_l y la onda \vec{u}_t se propaga con velocidad v_t . Como en general $\lambda > 0$, se tiene

$$v_l > \sqrt{2}v_t \quad (\text{V.40})$$

La onda \vec{u}_t , al ser de divergencia nula no produce modificación del volumen, mientras que la \vec{u}_l sí lo hace.

Supongamos ahora ondas planas homogéneas monocromáticas. Para una onda \vec{u}_l

$$\vec{u}_l = \vec{u}_l^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{V.41})$$

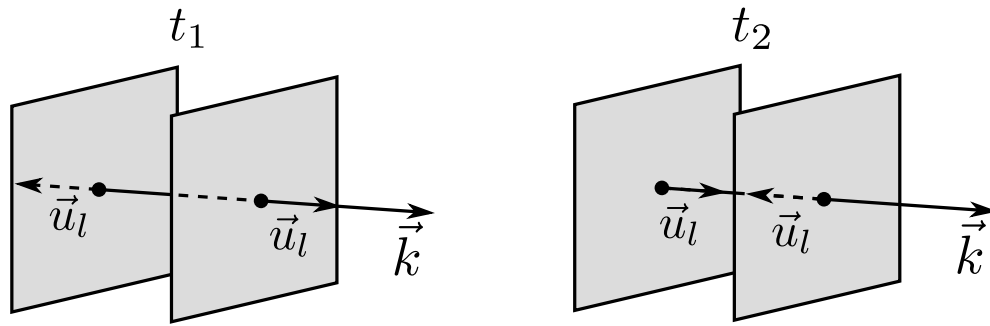
la relación entre k y ω es

$$k = \frac{\omega}{v_l} \quad (\text{V.42})$$

La condición $\vec{\nabla} \times \vec{u}_l = 0$ queda

$$\vec{k} \times \vec{u}_l = 0 \quad (\text{V.43})$$

o sea que el vector desplazamiento en este caso es paralelo a la dirección de propagación dada por \vec{k} . Por lo tanto se trata de ondas longitudinales. Las tensiones a través de una superficie de fase, y amplitud, constante, serán sólo normales, de presión o de tracción, según el instante de tiempo.



Para una onda plana homogénea monocromática \vec{u}_t

$$\vec{u}_t = \vec{u}_t^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{V.44})$$

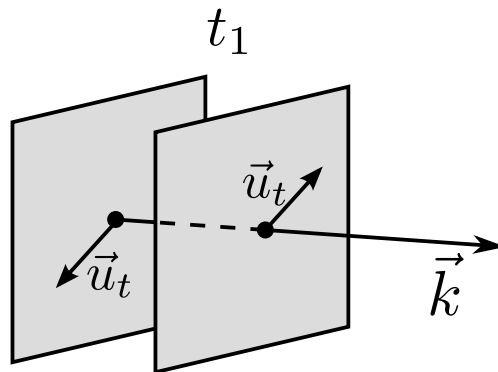
la relación entre k y ω es

$$k = \frac{\omega}{v_t} \quad (\text{V.45})$$

La condición $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_t = 0$ queda

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_t = 0 \quad (\text{V.46})$$

o sea, el vector desplazamiento es perpendicular al vector de onda k . Por lo tanto se trata de ondas transversales. Las tensiones a través de superficies de fase serán sólo de corte.



Capítulo VI

Fluidos: conceptos generales y fluidos ideales

VI.1. Fluidos – Descripción Lagrangiana y Euleriana – Derivada substancial

Estudiaremos el comportamiento de los fluidos tratándolos como medios continuos. Consideraremos elementos de fluido que contengan muchas moléculas y que a su vez sean de dimensiones macroscópicamente infinitesimales.

Como vimos en la introducción al curso, una característica fundamental de los fluidos, a diferencia de los sólidos, es que elementos de materia que están muy próximos entre sí en un determinado instante, pueden encontrarse posteriormente muy alejados. Los fluidos presentan resistencia si se intenta cambiar su volumen, pero no lo hacen si se busca cambiar su forma sin cambiar su volumen. Los fluidos abarcan los líquidos y los gases, los que se diferencian por su compresibilidad, siendo en estos últimos mucho mayor que en los líquidos. A pesar de ser tan diferentes en su comportamiento, muchas de las ecuaciones que los gobiernan son las mismas.

Para describir a los fluidos se utilizan dos métodos: el Lagrangiano que analiza la trayectoria de cada elemento de fluido, y el Euleriano que estudia las magnitudes asociadas al fluido en función del tiempo en cada punto fijo del espacio, independientemente de qué elemento de fluido lo este ocupando. Con el primer método se obtiene más información que en el segundo pero es muy dificultoso y problemático para su aplicación. Además, el comportamiento individual de los elementos de fluido es, en general, de poco interés, e interesa más conocer el estado de movimiento del fluido y el valor de las diferentes magnitudes físicas en cada punto del espacio ocupado por el fluido.

En la descripción Lagrangiana, que es similar a la que usualmente se hace con un sistema de partículas, es necesario identificar los diferentes elementos del fluido. Para eso se da, para cada elemento de fluido, su posición \vec{r}_0 en un instante t_0 . A medida que el fluido evoluciona en el tiempo, la posición de ese elemento de fluido estará dada

por

$$\vec{r}(\vec{r}_0, t); \quad (\text{VI.1})$$

a diferencia de lo que sucede en los sólidos, \vec{r} puede depender fuertemente de \vec{r}_0 . La velocidad del elemento de fluido estará dada por la variación por unidad de tiempo de la posición de ese elemento de fluido, o sea

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}_0} \quad (\text{VI.2})$$

y en forma similar se define la aceleración. Una de las desventajas de la descripción Lagrangiana es que a un instante $t \neq t_0$ no es inmediato obtener cómo varía \vec{v} con \vec{r} , a partir de su dependencia con \vec{r}_0 .

En el presente curso usaremos la descripción Euleriana, en la que no se busca la trayectoria de cada elemento de fluido. Los valores de las distintas magnitudes se dan para cada punto \vec{r} del espacio y a todo tiempo t , y no su valor en un dado elemento de fluido. El estado del fluido queda determinado por medio de funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, y de dos cualesquiera de las magnitudes termodinámicas del fluido, por ejemplo, la densidad $\rho(\vec{r}, t)$ y la presión $p(\vec{r}, t)$. Cualquier otra magnitud termodinámica podrá obtenerse de éstas y de la ecuación de estado $p = p(\rho, t)$.

La derivada parcial $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t)$ no es, en general, igual a la aceleración del elemento de fluido que está al tiempo t en el punto \vec{r} , ya que el mismo ocupa ese lugar solo por un instante. Para obtener la expresión correcta de la aceleración, observemos que un elemento de materia que está en el punto \vec{r} al tiempo t , estará en el punto $\vec{r} + \vec{v} dt$ después de transcurrido un dt y, por lo tanto, su cambio de velocidad en el intervalo dt será

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt \\ &= \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Por lo tanto la aceleración en el punto \vec{r} y al tiempo t del elemento de fluido es

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (\text{VI.4})$$

Es conveniente introducir la derivada material o derivada substancial mediante el operador

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \quad (\text{VI.5})$$

Cuando es aplicada a una magnitud $f(\vec{r}, t)$ da una derivada de f siguiendo el movimiento del fluido. Usando la derivada substancial podemos expresar la aceleración de un elemento de fluido como

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (\text{VI.6})$$

VI.2. Ecuación de continuidad o de conservación de la masa

Una porción del fluido al moverse lo hace conservando su masa, y este hecho impone restricciones al movimiento del mismo o a la variación de la densidad. Para obtener qué relaciones se tienen que cumplir entre las variaciones de la densidad de masa y el campo de velocidades, consideremos un volumen V inmerso en el fluido; supondremos que el volumen V es fijo respecto al sistema de coordenadas, por lo que el fluido, en general, atravesará su superficie S . Sea \vec{n} la normal saliente a la misma. La masa encerrada por S al instante t está dada por

$$\iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

donde ρ es la densidad de masa. La masa del fluido que atraviesa la superficie hacia afuera por unidad de tiempo es

$$\oiint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Como se considera que en el fluido no hay procesos que creen o destruyan masa, la variación en el tiempo de la masa del fluido que está en el volumen V debe ser igual a la masa del fluido que atraviesa la superficie S , cambiada de signo.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \oiint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

La derivada temporal se puede poner bajo el signo integral ya que V es fijo; usando además el teorema de Gauss se tiene

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} (\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{r}, t) \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (\text{VI.7})$$

Esta integral se anula para todo volumen V ; por lo tanto el integrando deberá ser nulo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{VI.8})$$

Esta es la ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad. Podemos ponerla también como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{VI.9})$$

En el caso de fluidos incompresibles esta ecuación toma una forma muy simple. Se dice que un fluido es *incompresible* cuando la densidad del mismo no se ve afectada por cambios en la presión u otro agente (por ejemplo conducción de calor). Luego en

un fluido incompresible la densidad de un elemento de fluido no cambia al moverse, o sea

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\rho = 0 \quad (\text{VI.10})$$

El caso ρ constante y uniforme es un caso particular de incompresibilidad; pero si la densidad no es la misma en todo el espacio, variará en el tiempo, si el fluido es incompresible, de acuerdo a (VI.10). Reemplazando esta condición en (VI.9) resulta que para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad toma la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

VI.3. Fuerzas sobre un elemento de fluido – Ecuación de movimiento

Sobre un elemento de fluido actúan fuerzas volumétricas de largo alcance, como la fuerza de gravedad, y fuerzas superficiales de corto alcance producidas por los elementos adyacentes y que tienen un origen molecular; a diferencia de lo que sucede en los sólidos, en el caso de los fluidos además de la fuerza entre moléculas que están a ambos lados de la superficie de separación entre elementos, hay una contribución a la fuerza de corto alcance proveniente del transporte de impulso a través de la frontera común por moléculas que la atraviesan; en el caso de los gases las fuerzas superficiales se deben fundamentalmente a este segundo fenómeno.

En un estado de reposo, debido a que un fluido no presenta resistencia si se intenta cambiar su forma, no habrá tensiones de corte sobre ningún elemento del mismo. Y esto deberá ser así en cualquier sistema de ejes, y no sólo para el sistema de ejes principales. Luego, en un fluido en reposo habrá sólo tensiones normales, que en general son de compresión e iguales en todas las direcciones:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (\text{VI.12})$$

La densidad de fuerza volumétrica equivalente a esta presión se puede obtener de (IV.24) y resulta

$$\vec{f}' = -\vec{\nabla}p \quad (\text{VI.13})$$

Este resultado se visualiza fácilmente considerando un prisma rectangular cuyos lados están en x y $x + \Delta x$, en y e $y + \Delta y$ y en z y $z + \Delta z$. La fuerza en la dirección x será la diferencia de las presiones en las caras normales al eje x , multiplicada por el área correspondiente

$$\begin{aligned} F_x &= p(x)\Delta y\Delta z - p(x + \Delta x)\Delta y\Delta z \\ &= -\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}\Delta V \end{aligned}$$

resultando, en el límite para Δ pequeño, que la componente x de la fuerza por unidad de volumen es

$$f'_x = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Cuando el fluido está en movimiento, si la velocidad no es uniforme, pueden aparecer tensiones de corte que dan lugar a la viscosidad. Lo analizaremos más adelante.

Teniendo en cuenta la expresión de la aceleración de un elemento de materia dada por las ecuaciones (VI.4) ó (VI.6) y siendo ρ la masa por unidad de volumen la ecuación de movimiento para el fluido será de la forma

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \text{fuerzas viscosas} \quad (\text{VI.14})$$

donde \vec{f} es la fuerza de largo alcance por unidad de volumen.

VI.4. Fluidos ideales – Ecuación de Euler – Ecuación de adiabaticidad

Llamaremos fluido ideal a aquél en que las fuerzas internas son sólo provenientes de la variación espacial de la presión, o sea, aquél en el que se puede despreciar la viscosidad. Además, en muchas ocasiones, en un fluido ideal se supone que no hay conducción de calor entre los distintos elementos de materia.

Para un fluido ideal, la ecuación de movimiento resulta

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (\text{VI.15a})$$

Si la única fuerza de largo alcance es la debida a la gravedad:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \quad (\text{VI.15b})$$

Esta es la *ecuación de Euler*.

La condición de que no haya flujo de calor entre elementos ni fricción interna debido a la viscosidad implica que la entropía de un elemento de fluido se conserva al moverse el elemento; como la masa de éste se conserva, la entropía por unidad de masa s satisface la *ecuación de adiabaticidad*

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0 \quad (\text{VI.16})$$

La entropía se puede relacionar con la densidad y la presión para lo que es necesario dar una ecuación de estado $p = p(\rho, T)$. Por ejemplo, para un gas perfecto o ideal, la ecuación de estado es

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T \quad (\text{VI.17})$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y m la masa media de las partículas. Si el calor específico a volumen constante por unidad de masa c_V es independiente de la temperatura, la entropía de un gas ideal se puede poner

$$s = c_V \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + cte \quad (\text{VI.18})$$

siendo γ el cociente de los calores específicos a presión y a volumen constante

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} \quad (\text{VI.19})$$

En un proceso adiabático en un gas ideal, $\frac{p}{\rho^\gamma}$ se mantiene constante para cada elemento de gas.

En el caso general en que se tienen en cuenta la conductividad térmica y los efectos de la viscosidad, en lugar de la ecuación (VI.16) hay una ecuación de conservación de la energía más compleja. En ocasiones esta ecuación se reemplaza por otra condición, por ejemplo, incompresibilidad. Esta es una suposición común para los líquidos, dada su baja compresibilidad.

Para obtener la descripción de un fluido deberemos encontrar \vec{v} , ρ , p para todo punto ocupado por el fluido y a todo tiempo t . Para ello debemos resolver en forma conjunta la ecuación de continuidad, la ecuación de movimiento y, en el caso de fluidos ideales, la ecuación de adiabaticidad en la que previamente se haya puesto la entropía como función de p y ρ ; esta última ecuación se reemplaza a veces por otra condición, como incompresibilidad. A estas ecuaciones hay que agregarle condiciones de contorno; si el fluido ideal está en contacto con superficies rígidas, la velocidad del fluido normal a dichas superficies deberá ser igual a la componente normal de \vec{V}_s , velocidad de la superficie, o sea

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{V}_s \cdot \vec{n} \quad (\text{VI.20})$$

En la superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, la velocidad normal a la superficie de ambos fluidos deberá ser igual entre sí. Además las presiones deberán ser iguales en ambos fluidos (sobre la superficie de separación), si se desprecia la tensión superficial (que veremos más adelante).

VI.5. Fluidos en equilibrio estático: hidrostática

En un estado de equilibrio estático, la velocidad de fluido es nula en todo punto y no hay variaciones temporales de las diferentes magnitudes: \vec{v} , p , ρ , s . Las ecuaciones de continuidad y de adiabaticidad se satisfacen automáticamente y la ecuación de equilibrio mecánico se obtiene de la ecuación de movimiento haciendo \vec{v} y $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ nulos:

$$0 = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (\text{VI.21})$$

donde \vec{f} indica las fuerzas de largo alcance por unidad de volumen. En el caso de que consideremos sólo la fuerza de gravedad, la ecuación de equilibrio es

$$\vec{\nabla}p = \rho \vec{g} \quad (\text{VI.22})$$

La ecuación (VI.21) impone una restricción a las fuerzas \vec{f} bajo las cuales puede haber equilibrio; este es posible solamente si la fuerza por unidad de volumen \vec{f} se puede expresar como el gradiente de una función escalar; si este requisito se cumple, en el equilibrio p será constante sobre toda la superficie perpendicular a la dirección de la fuerza volumétrica.

Si la fuerza por unidad de masa $\frac{\vec{f}}{\rho}$ fuese conservativa

$$\frac{\vec{f}}{\rho} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (\text{VI.23})$$

la condición de equilibrio resulta

$$-\rho \vec{\nabla}U = \vec{\nabla}p \quad (\text{VI.24})$$

Tomando rotor en ambos miembros y usando la relación

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \times \vec{A}$$

resulta la condición

$$\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}U = 0 \quad (\text{VI.25})$$

o sea que $\vec{\nabla}\rho$ y $\vec{\nabla}U$ son paralelos; dado que el gradiente de una función es perpendicular a las superficies en que esa función es constante (superficies de nivel) resulta que las superficies de nivel de ρ , p y U coinciden en el equilibrio.

Para poder resolver la ecuación de equilibrio en (VI.22) hay que hacer alguna consideración adicional sobre la dependencia de ρ con p .

Es fácil ver que si el fluido es incompresible de densidad uniforme $\rho = \rho_0$, si la única fuerza volumétrica es el peso, la presión varía linealmente con la altura

$$p = p_0 - \rho_0 g z \quad (\text{VI.26})$$

Se puede mostrar que un cuerpo sumergido recibe un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado

Supongamos ahora que tenemos un fluido de densidad no uniforme dentro de un recipiente que rota alrededor del eje vertical z con velocidad angular constante Ω , y que el fluido ha adquirido esta velocidad. Si utilizamos un sistema de referencia que rota con el recipiente, deberemos tener en cuenta la fuerza centrífuga (ver I.12, **Sistemas no inerciales**); la fuerza de Coriolis se anula pues en este sistema la velocidad del fluido es nula. La ecuación de equilibrio será

$$\vec{\nabla}p = -\rho g \vec{z}' + \rho \Omega^2 (x' \vec{x}' + y' \vec{y}') \quad (\text{VI.27})$$

que se puede poner

$$\vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} U \quad (\text{VI.28})$$

con

$$U = gz' - \frac{1}{2}\Omega^2 (x'^2 + y'^2) \quad (\text{VI.29})$$

Las superficies de nivel de U son paraboloides de revolución con eje z

$$\frac{1}{2}\Omega^2 (x'^2 + y'^2) - gz' = cte \quad (\text{VI.30})$$

Luego, para que haya equilibrio las superficies de nivel de ρ y p deberán ser paraboloides de ecuación (VI.30).

En el caso de la atmósfera terrestre, la densidad decrece al decrecer la presión, debido a la compresibilidad del aire. De la ecuación de estado (VI.17)

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T$$

resulta para p la ecuación

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{H} \quad (\text{VI.31})$$

donde

$$H = \frac{p}{\rho g} = \frac{k_B T}{mg} \quad (\text{VI.32})$$

Si suponemos una atmósfera isoterma H es una constante y podemos integrar la ecuación (VI.31) obteniendo que p depende de z de la forma

$$p = p_0 e^{-z/H} \quad (\text{VI.33})$$

donde p_0 es la presión a $z = 0$. Tanto p como ρ decaen exponencialmente con la altura. H es la *escala de altura*. Si la temperatura no es uniforme, H puede seguir considerándose una escala de altura local, siendo la solución de (VI.31)

$$\frac{p(z)}{p_0} = \exp \left\{ - \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right\} \quad (\text{VI.34})$$

VI.5.1. Estabilidad de una atmósfera en equilibrio

El equilibrio de una atmósfera, cuya presión en función de la altura está dada por (VI.34), sólo es estable si la temperatura tiene una dependencia adecuada con la altura.

Para analizar cualitativamente la estabilidad de este equilibrio, consideremos una burbuja de aire que es desplazada verticalmente de su posición de equilibrio en z hasta $z + \delta z$. Este desplazamiento lo haremos adiabáticamente, pero lo suficientemente lento como para que se establezca el equilibrio de presiones con el gas que la rodea.

La burbuja, para poder equilibrar la presión en su nueva posición, deberá modificar su densidad en $\delta\rho_b$. Como el proceso es adiabático

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cte$$

de donde resulta

$$\delta\rho_b = \frac{\rho}{\gamma} \frac{\delta p}{p} = -\frac{\rho^2 g}{\gamma p} \delta z = -\frac{\rho g}{\gamma T} \frac{m}{k_B} \delta z$$

donde hemos usado la ecuación de equilibrio (VI.31) y la ecuación de estado (VI.17). Esta variación dentro de la burbuja puede no coincidir con el cambio con la altura de la densidad del gas en equilibrio que la rodea:

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \frac{d\rho}{dz} \delta z = \left[\frac{\rho}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dz} \right] \delta z \\ &= -\frac{\rho}{T} \left[\frac{gm}{k_B} + \frac{dT}{dz} \right] \delta z \end{aligned}$$

Si las variaciones en densidad son distintas la burbuja percibirá una fuerza neta hacia arriba o hacia abajo según que $\delta\rho_b$ sea menor o mayor que $\delta\rho$. La diferencia entre el empuje y el peso dan una fuerza en la dirección z :

$$f_z = (\delta\rho - \delta\rho_b) g = -\frac{\rho g}{T} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k_B} + \frac{dT}{dz} \right] \delta z$$

Para que el estado de equilibrio sea estable esta fuerza deberá ser negativa para $\delta z > 0$, de modo que tienda a restituir la burbuja a su posición original. O sea, la condición de estabilidad es que

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k_B}$$

es decir, que la temperatura aumente con la altura, o disminuya más lentamente que $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k_B}$. En caso contrario, se tiene una inestabilidad convectiva.

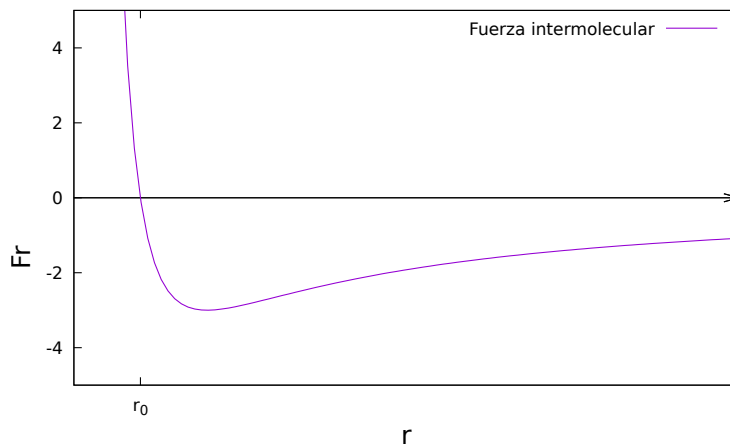
VI.6. Tensión superficial

Fenómenos de la vida cotidiana como: las gotas que caen de un cuenta gotas, una aguja que colocada con cuidado en la superficie de un líquido flota en el mismo, o que cuando introducimos un tubo limpio de pequeño diámetro en agua, esta se eleva en dicho tubo superando el nivel del agua en el exterior, aparentemente desconectados, en realidad están asociados con la superficie límite entre un líquido y cualquier otra sustancia y son fenómenos que se enmarcan en el estudio físico-químico de las superficies.

Si bien, el desarrollo histórico del estudio de las superficies se basó en los fenómenos que nombramos inicialmente, para comprender el origen de estos fenómenos es necesario conocer el tamaño y distancia entre las moléculas de una sustancia, como así también, las fuerzas entre las mismas. A partir de ciertos experimentos se conoce que el tamaño de las moléculas es del orden de $(2-3 \times 10^{-8} \text{ cm})$ de diámetro. Por otro lado, se sabe que una molécula gramo o mol de cualquier sustancia tiene 6×10^{23} moléculas, y que en condiciones normales (de presión y temperatura) una molécula gramo de un gas ocupa 22400 cm^3 . Si dividimos este volumen por el Nro. de Avogadro obtenemos el volumen por molécula ($vol_g = 22400 \text{ cm}^3 / 6 \times 10^{23} \approx 37 \times 10^{21} \text{ cm}^3$) Considerando que dicho volumen por molécula es un cubo de lado l_g en cuyo centro se encuentra la molécula, la distancia entre ellas será $l_g = \sqrt[3]{37 \times 10^{21} \text{ cm}^3} = 34 \times 10^{-8} \text{ cm}$. En un gas l_g es 10 veces más grande que el tamaño de la molécula ($l_g \approx 10\phi$). Veamos ahora que distancia entre moléculas se da en un líquido. Si analizamos el caso del agua líquida, una molécula gramo ocupa un volumen de 18 cm^3 ; entonces, el volumen por molécula será $vol_l = 18 \text{ cm}^3 / 6 \times 10^{23} = 30 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ y el lado $l_l = \sqrt[3]{30 \times 10^{-24} \text{ cm}^3} = 3 \times 10^{-8} \text{ cm}$. Comparando, l_l es del orden del tamaño de la molécula, pero en un sólido también $l_s \approx$ es del orden de $3 \times 10^{-8} \text{ cm}$, entonces?? El agua es un caso especial a pesar de que su molécula es sencilla. Las moléculas de agua son dipolares, esto explica en parte los enlaces puente de hidrógeno que hacen que las moléculas estén muy juntas. Estos enlaces se rompen continuamente permitiendo que el agua se comporte como líquido.

Las fuerzas intermoleculares, de origen eléctrico, en función de la separación se muestran en la figura (VI.6). Un par de moléculas estarán en equilibrio si su separación es " r_o "; si se separan levemente se atraerán y si se aproximan a una distancia inferior a " r_o ", se repelen por eso decimos que es un punto de equilibrio estable.

El análisis se complica cuando son más moléculas. Teniendo en cuenta la energía cinética media de las partículas, modelizamos que las partículas en un líquido están en movimiento alrededor de un punto de equilibrio (vibrando). Las condiciones cambian en la superficie; las moléculas de la superficie son atraídas por las moléculas interiores del líquido quedando en desbalance de fuerzas. Suponiendo que la molécula tiene cierta energía cinética, si puede superar la atracción ejercida por las otras moléculas del interior del líquido, se escapará. Dicho proceso es el de evaporación. Si no se puede escapar se mantendrá haciendo excursiones hasta que vuelva nuevamente. La mayor parte del tiempo experimentará las fuerzas atractivas dando lugar a los fenómenos de superficie.



VI.6.1. Coeficiente de tensión superficial

De los hechos experimentales, la mayoría de los fenómenos asociados con la física de superficie se pueden describir con la ayuda de una sola propiedad medible. Si se modifica la forma de un líquido aumentando su área, se necesita una cantidad definida de trabajo por unidad de área para originar la nueva superficie. Este trabajo puede recuperarse cuando el área disminuye, lo que nos dice que aparentemente almacena energía potencial. Las consideraciones energéticas nos dan una explicación de la forma esférica que adoptan las gotas libres, dado que la forma esférica es la superficie de área mínima para un volumen dado. La relación entre el trabajo que debe hacerse u a la superficie a incrementar es

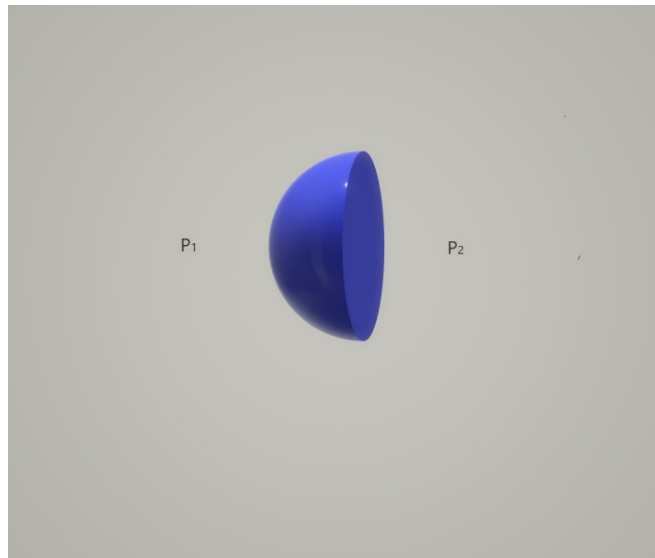
$$dw = \gamma dS \quad (\text{VI.35})$$

$$[\gamma] = \text{J/m}^2 = \text{N/m}$$

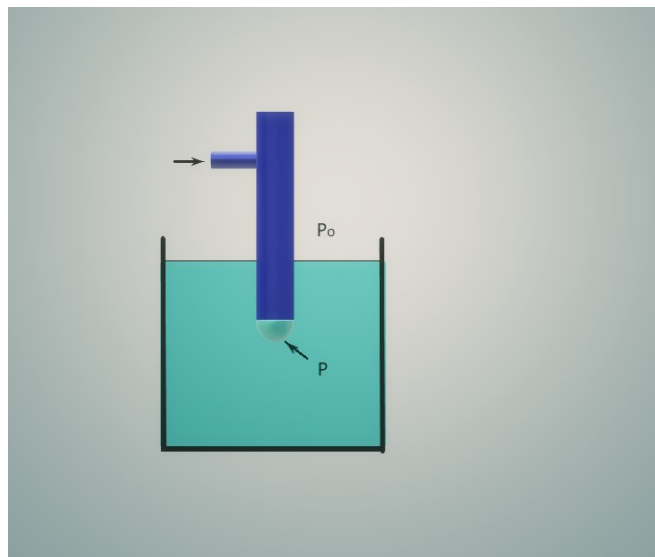
donde γ es el coeficiente de tensión superficial.

	γ (N/m)
Agua	0,078
Mercurio	0,465

Otra propiedad que se observa de los experimentos es que en una superficie curva que delimita dos sustancias, la presión sobre la cara convexa es menor que sobre la cara cóncava (ver figura VI.6.1)



Supongamos un tubo cilíndrico de diámetro interior pequeño (1mm aproximadamente), el cual lo sumergimos en un líquido contenido en un recipiente (ver figura VI.6.1). Soplamos por el tubo y se forma una burbuja de aire en su interior. Al aumentar la presión, la burbuja crece, aumentando su área. Esto implica que las moléculas de interior del líquido vayan a la superficie sin cambiar la distancia entre ellas, es decir el espaciado intermolecular. Si bien, la burbuja de aire que se forma en el tubo sufre ciertas transformaciones hasta volverse inestable y romperse fuera del tubo, justo en el instante de romperse, tiene una forma hemisférica de radio R .



El área de la hemiesfera será

$$S = 2\pi R^2,$$

si sufre un incremento...

$$dS = 4\pi R dR, \quad (\text{VI.36})$$

introduciendo (VI.36) en (VI.35) tenemos

$$dW = \gamma 4\pi R dR. \quad (\text{VI.37})$$

Por otro lado, el trabajo para incrementar la superficie se puede expresar en función de la diferencia de presiones entre sus caras cóncava y convexa.

$$\iint_S (P - P_0) dS = F_n,$$

siendo F_n fuerza neta que actúa sobre la burbuja. El trabajo diferencial que se debe realizar para incrementar la superficie en un dS será,

$$\begin{aligned} dW &= \iint_S (P - P_0) dS dR = F_n dR \\ dW &= (P - P_0) 2\pi R^2 dR = F_n dR \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

Igualando (VI.37) y (VI.38), obtenemos

$$\frac{2\gamma}{R} = P - P_0 = \Delta P \quad (\text{VI.39})$$

donde notamos que la diferencia de presión está en función del coeficiente de tensión superficial.

Si ahora en vez de tener un tubo tenemos dos placas muy cercanas y la burbuja es la mitad de un cilindro, despreciando efectos de borde,

$$s = \pi RL$$

$$dS = \pi L dR$$

$$dW = \gamma dS = \gamma \pi L dR \quad (\text{VI.40})$$

Por otro lado,

$$dW = (P - P_0) \pi RL dR \quad (\text{VI.41})$$

Igualando (VI.40) y (VI.41), tenemos

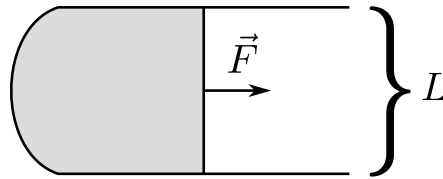
$$P - P_0 = \Delta P = \frac{\gamma}{R} \quad (\text{VI.42})$$

Si comparamos (VI.42) con (VI.39) vemos que la diferencia de presión en la burbuja semicilíndrica es la mitad que en la hemiesférica.

VI.6.2. Otra forma de entender la tensión superficial...

Supongamos un líquido en contacto con un gas. Las moléculas en el interior del líquido son atraídas por otras moléculas del mismo en todas las direcciones; en cambio las moléculas en la superficie libre sienten la interacción con otras moléculas del líquido sólo de un lado. Esta asimetría es la responsable de que aparezca una resistencia si se quiere llevar más moléculas desde el interior hasta la superficie para aumentar el tamaño de ésta.

Supongamos un armazón de alambre rectangular en donde uno de sus lados es móvil. Al sumergir el dispositivo en una solución jabonosa se forma una película.



Si se quiere aumentar el área de dicha película, habrá que aplicar una fuerza para poder llevar partículas del interior a la superficie. Para este caso,

$$dS = 2L dx$$

en donde el 2 aparece por que la película tiene dos caras. Teniendo en cuenta que por un lado, que el diferencial de trabajo necesario (ecuación (VI.35)) es proporcional al diferencial de superficie,

$$dW = \gamma dS = \gamma 2L dx \quad (\text{VI.43})$$

y que por otro lado

$$dW = F dx$$

nos queda,

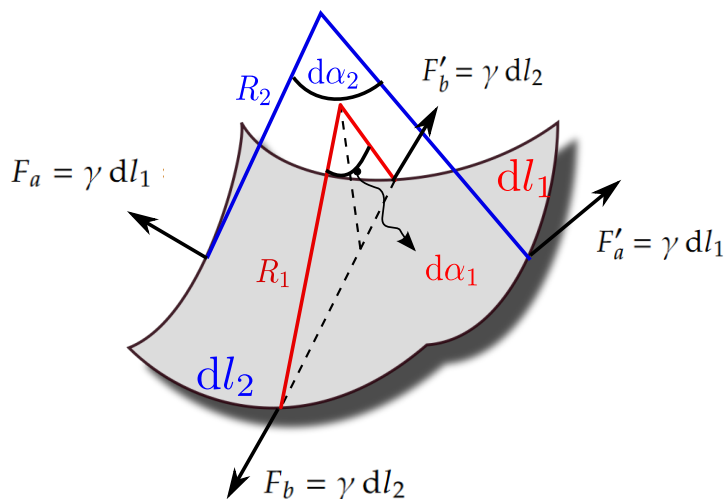
$$\begin{aligned} F dx &= \gamma 2L dx \\ F &= \gamma 2L \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

La fuerza que acabamos de identificar F es la misma que si cada cara de la película tirase de la barra transversal con una fuerza γL . Podemos considerar las superficies del líquido como membranas elásticas en tensión y la magnitud γ como la fuerza por unidad de longitud que ejercen sobre su contorno. Definimos la tensión superficial γ como la fuerza tangencial a la superficie de separación entre dos medios continuos,

que una parte de la superficie ejerce sobre la otra, por unidad de longitud de la línea de separación entre las mismas, y perpendicular a dicha línea. Lo interesante, es que la fuerza debida a la tensión superficial es independiente de la superficie.

Éste fenómeno superficial ocurre no solamente en las superficies libres de un líquido, sino en interfaces entre distintos fluidos, o entre un fluido y un sólido. La tensión superficial, en general, es de tracción; si entre dos fluidos fuese de compresión (ejemplo: alcohol - agua), estos fluidos son miscibles.

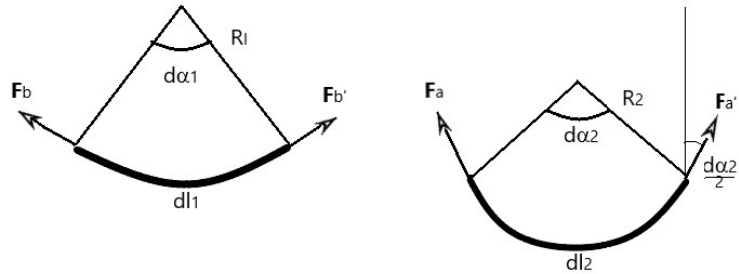
La tensión superficial es la causante de que pequeñas gotas de líquido en aire, o pequeñas burbujas de aire en agua, tomen una forma esférica, ya que el fluido busca hacer mínima la superficie.



Si la superficie de separación entre dos fluidos no es plana, habrá una resultante neta de las tensiones superficiales, normal a dicha superficie. Consideremos un elemento de superficie como el de la figura; sean dl_1 y dl_2 las longitudes de los lados y R_1 y R_2 los radios de curvatura.

$$l_1 = R_1 d\alpha_1,$$

$$l_2 = R_2 d\alpha_2$$



Las fuerzas superficiales en los distintos lados tomarán los valores

$$F_a = \gamma dl_1 = F'_a,$$

$$F_b = \gamma dl_2 = F'_b.$$

Dado que la superficie está alabeada, las componentes de las fuerzas en dirección perpendicular a la superficie, que denominaremos "y", será

$$F_a \operatorname{sen} \left(\frac{d\alpha_2}{2} \right) + F'_a \operatorname{sen} \left(\frac{d\alpha_2}{2} \right) \approx 2\gamma dl_1 \frac{d\alpha_2}{2} = \gamma dl_1 \frac{1}{2} \frac{dl_2}{R_2},$$

$$F_b \operatorname{sen} \left(\frac{d\alpha_1}{2} \right) + F'_b \operatorname{sen} \left(\frac{d\alpha_1}{2} \right) \approx 2\gamma dl_2 \frac{d\alpha_1}{2} = \gamma dl_2 \frac{1}{2} \frac{dl_1}{R_1}.$$

La resultante de las fuerzas en la dirección "y" será,

$$F_T^y \approx \gamma dl_1 \frac{dl_2}{R_2} + \gamma dl_2 \frac{dl_1}{R_1}.$$

y la tensión resultante,

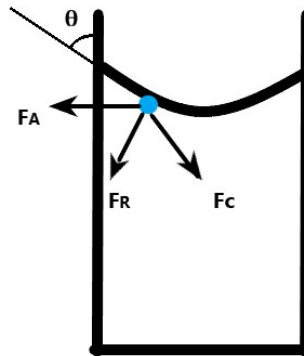
$$\tau_T^y = \frac{F_T^y}{dl_1 dl_2} = \gamma \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Esta tensión resultante debe ser compensada por una diferencia de presión entre los fluidos, entonces

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{VI.45})$$

VI.6.3. Comportamiento de la superficie. Ángulo de contacto.

Supongamos ahora que tenemos un líquido en un recipiente, ¿qué determina la curvatura de la superficie de dicho líquido? Analicemos una molécula superficial cerca de la pared del recipiente; dicha molécula estará sometida a fuerzas de cohesión (\vec{F}_c) debidas a las moléculas del líquido y a fuerzas de adherencia (\vec{F}_A), debidas a las paredes.



Si las fuerzas tienen la misma magnitud $|\vec{F}_c| = |\vec{F}_A|$, la fuerza resultante \vec{F}_R será como se muestra en la figura, resultando una superficie cóncava que "moja" el recipiente. Para que esta configuración se encuentre en equilibrio la fuerza resultante debe ser normal a la tangente de la superficie en todo punto. El ángulo θ se denomina ángulo de contacto. Si la fuerza de cohesión es mayor que la de adherencia $|\vec{F}_c| > |\vec{F}_A|$, la superficie del líquido será convexa y no mojará las paredes del recipiente.

	θ
Agua pura y vidrio limpio	0
Agua y plata	90
Mercurio y vidrio	140

VI.7. Líneas de corriente

En un fluido en movimiento, las curvas que son tangentes a la velocidad del mismo a un tiempo fijo t , se llaman líneas de corriente. La familia de líneas de corriente al tiempo t son solución de

$$\frac{dx}{v_x(\vec{r}, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{r}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{r}, t)} \quad (\text{VI.46})$$

Cuando la velocidad es independiente de t , o sea, el flujo es estacionario, las líneas de corriente tienen la misma forma para todo tiempo.

Un concepto relacionado es el de tubo de corriente, que es la superficie formada por todas las líneas de corriente que pasan por cada uno de los puntos de una curva cerrada en el fluido.

La trayectoria de un elemento de fluido no necesariamente coincide con una línea de corriente, ya que la trayectoria del elemento es tangente a la velocidad en instantes de tiempo distintos para diferentes puntos de la misma. Cuando el flujo es estacionario la trayectoria del elemento coincide con la correspondiente línea de corriente, y los tubos de corriente se comportan como si fueran realmente tubos sin fricción (si no hay viscosidad).

Se define también la línea de traza como aquella sobre la cual están, en un instante dado, los elementos de fluido que pasaron en algún instante anterior por un punto fijo del espacio. Si se descarga lentamente un material marcador en algún punto fijo, la línea visible producida en el fluido en movimiento es una línea de traza. Cuando el flujo es estacionario las líneas de traza coinciden con las líneas de corriente y con las trayectorias de los elementos de fluido.

VI.8. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una ecuación de conservación de la energía de un elemento de fluido en su movimiento. Lo analizaremos para un fluido ideal en un movimiento estacionario y primero supondremos que hay adiabaticidad; consideraremos por simplicidad que la fuerza volumétrica es debida a la gravedad, pero la deducción es similar si $\vec{f} = -\vec{\nabla}U$. Las ecuaciones de movimiento (o de Euler) y la adiabaticidad toman la forma

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g} \quad (\text{VI.47})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}s = 0 \quad (\text{VI.48})$$

Usando la relación vectorial

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

la ecuación de movimiento se puede poner

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$$

multiplicando escalarmente esta ecuación por \vec{v} resulta

$$\vec{v} \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{g} \right] = 0 \quad (\text{VI.49})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la relación termodinámica

$$dE = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

donde E y s son la energía interna y la entropía por unidad de masa, podemos poner usando (VI.48)

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} E = -p \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \vec{v} \quad (\text{VI.50})$$

ya que $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ es, en un problema estacionario, la variación en un dado elemento de fluido. Sumando las ecuaciones (VI.49) y (VI.50) se llega a

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{v^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0 \quad (\text{VI.51})$$

tomando el eje z en la dirección de la vertical .

Como \vec{v} es tangente a la línea de corriente, que en el caso estacionario coincide con la trayectoria del elemento de fluido, la ecuación (VI.51) implica que a lo largo de la línea de corriente

$$\frac{v^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} + gz = cte \quad (\text{VI.52})$$

si se considera otra línea de corriente la constante puede ser distinta. Esta es la ecuación de Bernoulli para el caso adiabático; $\frac{v^2}{2}$ es la energía cinética por unidad de masa, E la energía interna por unidad de masa; el término $\frac{p}{\rho}$ proviene del trabajo que realizan sobre el elemento de fluido los elementos adyacentes y gz es la energía potencial por unidad de masa.

En lugar de la condición de adiabaticidad, supongamos que el fluido es incompresible. La condición de incompresibilidad $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ en el caso estacionario se reduce a:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \quad (\text{VI.53})$$

o sea las trayectorias están en superficies de $\rho = cte$. Multiplicando (VI.53) por $-\frac{p}{\rho^2}$ y sumando a (VI.49) resulta

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right] = 0$$

con lo que la ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible toma la forma

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cte \quad (\text{VI.54})$$

sobre una línea de corriente.

También se puede obtener una expresión del teorema de Bernoulli válida con la suposición de politropía $\rho = \rho(p)$.

VI.9. Expansión y rotación locales de un fluido – Vorticidad – Fuentes y sumideros

La expansión y rotación locales de un fluido alrededor de un punto del mismo se pueden describir mediante la divergencia y el rotor de la velocidad.

Para ver que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ está relacionada con la expansión local del fluido, consideremos la ecuación de continuidad y tengamos en cuenta que siendo ρ la masa por unidad de volumen, $\frac{1}{\rho}$ representa el volumen por unidad de masa, o sea el volumen específico v

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (\text{VI.55})$$

Calculemos su derivada substancial

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{VI.56})$$

donde hemos usando la ecuación de continuidad. Luego

$$\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{VI.57})$$

o sea, la variación relativa, o tasa de variación del volumen, está dada por $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. En caso de ser positiva tendremos una expansión local.

Para analizar la rotación local del fluido consideremos un círculo centrado en el punto en estudio, de radio ε pequeño, rodeado por la circunferencia C . Por el teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

Orientando el círculo de modo que \vec{n} esté en la dirección de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ teniendo en cuenta que ε es pequeño tendremos

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \approx |\vec{\nabla} \times \vec{v}| \pi \varepsilon^2$$

Luego, si $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$ en ese punto, el valor medio de la componente de la velocidad tangente a la circunferencia será distinta de cero, lo que implica una rotación local del fluido. Se tiene

$$\text{valor medio de } v \text{ tangencial} = \frac{1}{2} \left| \vec{\nabla} \times \vec{v} \right| \varepsilon \quad (\text{VI.58})$$

por lo que el valor de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ es el doble de la velocidad angular local. El vector

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (\text{VI.59})$$

es la vorticidad del fluido.

Una región pequeña del fluido en la que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ tenga valores excepcionalmente altos se llama fuente o sumidero, según el signo de la divergencia. Matemáticamente se aproxima por una singularidad en la que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ se hace infinito en un punto. Estos picos en la divergencia de la velocidad no se producen fácilmente en el interior de un fluido por efectos dinámicos; normalmente son consecuencia de alguna acción externa. Por ejemplo, un caño de pequeño diámetro que inyecta (o succiona) material en el interior de un fluido produce un flujo similar a una fuente (sumidero) puntual ubicado en el extremo del caño. Se puede mostrar que la contribución a la velocidad del fluido de una fuente puntual ubicada en \vec{r}' es

$$\vec{v}_f = k \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (\text{VI.60})$$

donde la constante k está relacionada con la intensidad de la fuente.

VI.9.1. Circulación – Distribución de la vorticidad – Teorema de Kelvin-Thomson

Definimos la circulación, o circulación de la velocidad, como la integral curvilínea de la velocidad sobre cualquier curva cerrada C en el fluido

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (\text{VI.61})$$

usando el teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.62})$$

o sea que la circulación es igual al flujo de la vorticidad a través de la superficie rodeada por C .

Consideremos ahora una curva cerrada C que no está fija en el espacio sino moviéndose con el fluido de modo que sobre ella estén siempre los mismos elementos de fluido. Se puede mostrar que si se cumplen ciertas condiciones (como por ejemplo densidad uniforme o gradiente de densidad paralelo al gradiente de presión, siempre con fuerza por unidad de masa conservativa), la circulación sobre C es independiente

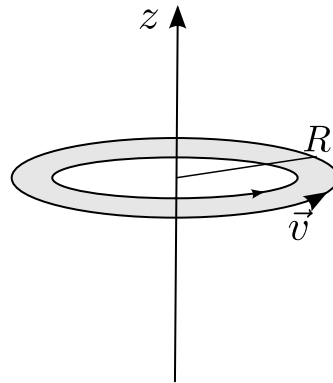
del tiempo, o sea, es la misma a medida que la curva se va moviendo con el fluido y, eventualmente, cambia su forma. Este es el teorema de Kelvin o de Thomson.

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{D}{Dt} \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$$

En muchas ocasiones es mas conveniente pensar el movimiento del fluido en términos de la vorticidad más que en términos de la velocidad. La vorticidad tiene la ventaja matemática de que es siempre un campo solenoidal ya que, de su misma definición, resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (\text{VI.63})$$

Hay problemas tales que se puede separar el fluido en dos regiones, una de ellas con vorticidad nula. Ciertos fenómenos, como por ejemplo los tornados, se caracterizan porque el valor de la vorticidad es mucho mayor en las cercanías de una línea que en cualquier otra parte del fluido. Estas líneas necesariamente son tangentes a la vorticidad en todo punto para que se pueda satisfacer $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$. Se aproxima por una singularidad lineal en la que $\omega \rightarrow \infty$. Esto constituye un vórtice lineal.



Por ejemplo, supongamos un fluido que rota alrededor del eje z con velocidad angular función del radio de tal forma que $\vec{\omega} = 0$ en todas partes salvo sobre el eje. Teniendo en cuenta (VI.62), la circulación sobre cualquier circunferencia alrededor del eje será la misma; para que el flujo de $\vec{\omega}$ a través de los círculos correspondientes sea distinto de cero, la vorticidad $\vec{\omega}$ deberá tener una singularidad en el eje z , o sea que el eje será un vórtice lineal. De la condición $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ y de la expresión del rotor en cilíndricas se tiene

$$\frac{d}{dR} (Rv_\varphi(R)) = 0 \quad R \neq 0$$

El campo de velocidades resultante es

$$v_\varphi(R) = \frac{k}{R} \quad (\text{VI.64})$$

donde la constante k está relacionada con la potencia del vórtice lineal.

También existen casos en los que la vorticidad toma valores excepcionalmente altos en las cercanías a una superficie, se definen así los vórtices superficiales, u hojas de vórtices. Un ejemplo son los flujos en los alrededores de las alas de los aviones.

En forma similar a las líneas de corriente y a los tubos de corriente, se definen las líneas de vorticidad y los tubos de vorticidad. Cuando se conserva la circulación de la velocidad, las líneas de vorticidad se mueven con el fluido, y también lo hacen los tubos de vorticidad.

VI.10. Ondas de sonido

Veamos primero que, para un fluido ideal, de las ecuaciones de continuidad y adiabaticidad, podemos escribir una ecuación para $\frac{D\rho}{Dt}$. De la ecuación de estado del fluido se puede poner la entropía como función de p y ρ (ver por ejemplo la ecuación (VI.18) para gases ideales):

$$s = s(p, \rho) \quad \text{ó} \quad \rho = \rho(p, s) \quad (\text{VI.65})$$

por lo que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{Dp}{Dt} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_p \frac{Ds}{Dt} \quad (\text{VI.66})$$

donde los símbolos $|_s$ ó $|_p$ indican que las derivadas deben hacerse a s o p constante, respectivamente. De la condición de adiabaticidad, $\frac{Ds}{Dt} = 0$, resulta

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{VI.67})$$

La cantidad $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$ tiene unidades de velocidad al cuadrado, y la designaremos c_s^2

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s} \quad (\text{VI.68})$$

La ecuación de continuidad (VI.9) con la condición de adiabaticidad resulta entonces

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{VI.69})$$

Consideremos un fluido ideal homogéneo en el que, por estar analizando escalas mucho menores que la escala de variación de la presión con la altura, podemos despreciar el efecto de la gravedad. En su estado de equilibrio el fluido tiene densidad ρ_0 y presión p_0 uniformes. Supongamos ahora que perturbamos levemente el equilibrio; las nuevas

magnitudes dependerán de \vec{r} y de t

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \\ p(\vec{r}, t) &= p_0 + p_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \vec{v}_1(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{VI.70}$$

Las ecuaciones que gobiernan al fluido (VI.15 y VI.69) resultan

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_s^2} \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} p_1 \right] + (\rho_0 + \rho_1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 &= 0 \\ (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 &= -\vec{\nabla} p_1\end{aligned}\tag{VI.71}$$

Teniendo en cuenta que las perturbaciones ρ_1 , p_1 y \vec{v}_1 son pequeñas, podemos linealizar las ecuaciones despreciando los términos cuadráticos o de orden superior en las perturbaciones (i.e. $\vec{v}_1 \cdot \vec{p}_1$). Las ecuaciones linealizadas quedan

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0\tag{VI.72}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1\tag{VI.73}$$

Derivando respecto al tiempo la primera ecuación y utilizando la segunda obtenemos finalmente

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0\tag{VI.74}$$

Resulta entonces que la perturbación en la presión satisface una ecuación de onda con velocidad de propagación c_s . Ecuaciones similares se pueden obtener para ρ_1 y \vec{v}_1 . La velocidad

$$c_s = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right]^{1/2}\tag{VI.75}$$

es la velocidad del sonido adiabática. Al ser los líquidos poco compresibles, c_s es mayor en ellos que en los gases. Para gases ideales la velocidad del sonido adiabática es

$$c_s = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2}\tag{VI.76}$$

Tomando rotor de la ecuación (VI.73) resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{v}_1 = 0\tag{VI.77}$$

como la perturbación es función del tiempo, esto implica

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{VI.78})$$

o sea, la onda de sonido es una onda longitudinal.

Si proponemos como solución una onda plana homogénea monocromática

$$p_1(\vec{r}, t) = p_1^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.79})$$

y similares expresiones para ρ_1 y \vec{v}_1 , la relación entre \vec{k} y ω deberá ser

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \quad (\text{VI.80})$$

Reemplazando la expresión (VI.79) para la presión y la similar para \vec{v}_1 en la ecuación (VI.73) obtenemos

$$\vec{v}_1 = \frac{p_1}{\omega \rho_0} \vec{k} \quad (\text{VI.81})$$

La velocidad del elemento de fluido está en la dirección de propagación de la onda, o sea que es una onda longitudinal y está en fase con la presión de perturbación. Finalmente, teniendo en cuenta (VI.75) resulta

$$\rho_1 = \frac{1}{c_s^2} p_1 \quad (\text{VI.82})$$

Si se genera una perturbación en la densidad en algún punto del fluido, esto trae aparejado una perturbación en la presión y en la velocidad, y estas perturbaciones se propagan en todas las direcciones con velocidad c_s . El punto de origen vuelve al equilibrio si no se repite la causa de la perturbación.

VI.10.1. Criterios de aplicabilidad de la aproximación de incompresibilidad

Hemos mencionado que en muchas situaciones se hace la suposición de incompresibilidad del fluido, y esto no sólo para líquidos sino también para gases. Veremos algunas consideraciones que ayudan a evaluar cuando esta suposición es válida.

El efecto de las fuerzas volumétricas sobre la densidad debido a la compresibilidad del fluido se produce en escalas cuya magnitud depende de estas fuerzas. Por ejemplo, para un gas bajo la acción de la gravedad la escala de variación de la densidad es del orden de la escala de altura $H = \frac{k_B T}{mg}$. Si estamos analizando una región de fluido de dimensión L mucho menor que la escala correspondiente, podemos despreciar la variación de la densidad por la compresibilidad del fluido, en el caso de fuerzas gravitatorias esta condición se puede poner

$$gL \ll c_s^2 \quad (\text{VI.83})$$

Cuando estamos analizando un fluido en el que la velocidad cambia, por ejemplo, por acción de un cuerpo sólido moviéndose en el fluido, debemos tener en cuenta que cualquier perturbación en la densidad es propagada en la forma de ondas de sonido. Para que la variación de la densidad tome valores no despreciables, la variación V de la velocidad debe ser del orden o mayor que la velocidad del sonido; por lo tanto se puede considerar incompresibilidad si

$$V \ll c_s \quad (\text{VI.84})$$

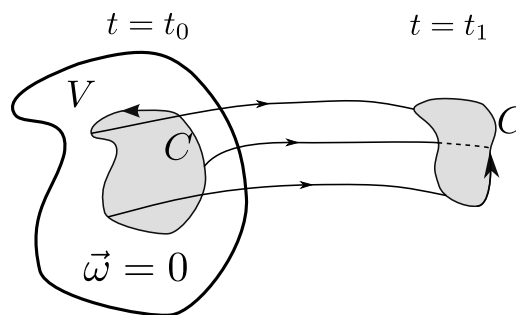
Dado que la velocidad del sonido es mayor en líquidos que en gases, la suposición de incompresibilidad es adecuada para los primeros en muchas más situaciones.

Por último, si el flujo depende del tiempo, debe cumplirse además que $\tau \gg \frac{l}{c_s}$, donde τ y l son tiempo y longitud característicos de variación, respectivamente.

VI.11. Flujo irrotacional

Supongamos que en el fluido ideal se cumplen las condiciones para la conservación de la circulación de la velocidad, o sea, fuerza volumétrica por unidad de masa conservativa y además o incompresibilidad con $\rho = \rho_0$, o no necesariamente incompresible con $\vec{\nabla} p$ paralelo a $\vec{\nabla} \rho$, o sea que la densidad dependa sólo de la presión; estas dos posibilidades abarcan una gran cantidad de situaciones; pero no es una suposición válida en el caso de que la densidad se vea afectada por otros factores que no sean la presión, como por ejemplo, calentamiento local. La conservación de la circulación implica la conservación del flujo de $\vec{\omega}$ a través de cualquier superficie que se mueva con el fluido.

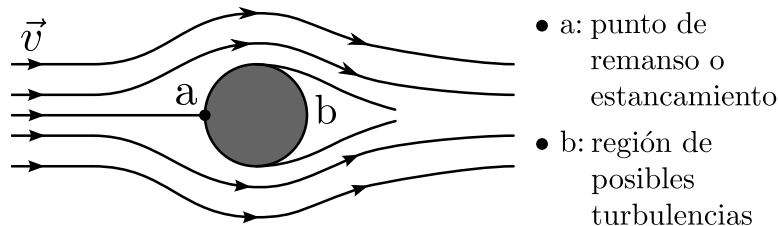
Supongamos que en un determinado instante t_0 en un cierto volumen V dentro del fluido la vorticidad es nula.



Si consideramos una curva cerrada C , dentro de esta región el flujo de $\vec{\omega}$ a través de la superficie rodeada por C , a $t = t_0$, será nulo. Teniendo en cuenta la conservación del flujo de la vorticidad, el flujo de $\vec{\omega}$ a través de la superficie rodeada por C , si esta se mueve con el fluido, seguirá siendo nulo en cualquier instante posterior t_1 . Esto será así para cualquier curva cerrada dentro de V , por lo que podemos concluir que la vorticidad seguirá siendo nula en las sucesivas ubicaciones de la región original. Podemos

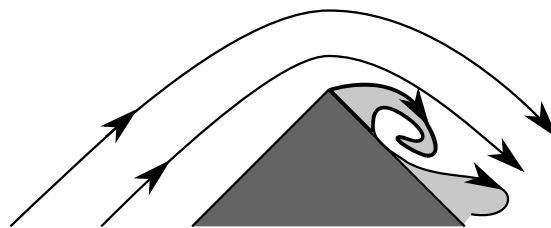
concluir que si el flujo es de circulación nula o irrotacional en una región, lo seguirá siendo a medida que se mueva, lo que indica la persistencia de la irrotacionalidad.

La conservación de la irrotacionalidad permite concluir que en el caso de un flujo estacionario alrededor de un cuerpo sólido, si la velocidad es uniforme en el flujo entrante, las líneas de corriente entrantes seguirán siendo en todo lugar de vorticidad nula. Por ejemplo, el movimiento de un fluido alrededor de una esfera puede ser, según la velocidad, de la forma:



Pero las líneas de corriente que nacen tangentes a la superficie del cuerpo son, en fluidos ideales, líneas de discontinuidad y allí se pueden generar turbulencias, apareciendo una hoja de vórtices; pero observemos que ninguna línea de corriente entrante pasará por esa región, y en ellas seguirá siendo $\vec{\omega} = 0$. Los fluidos reales son viscosos, y esa viscosidad, aunque sea pequeña, tiene que tenerse en cuenta en la cercanía de un cuerpo sólido.

Una situación similar a la mencionada con la esfera se puede tener para el flujo sobre un borde.



Aunque el flujo verdadero difiera del que se obtiene suponiendo en todos lados flujo irrotacional y viscosidad nula, el estudio de flujos irrotacionales estacionarios de fluidos ideales alrededor de un cuerpo sólido es de utilidad y, en muchos casos, el resultado diferirá poco del flujo real, salvo en una pequeña capa cerca de la superficie y, eventualmente, en una estrecha estela detrás del cuerpo (en el sistema de referencia en el que el sólido se mueve).

VI.11.1. Flujo potencial

Si $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ en una región, entonces \vec{v} se puede poner como el gradiente de un escalar que se llama función potencial de la velocidad

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi \quad (\text{VI.85})$$

Al flujo irrotacional se lo llama también flujo potencial. Las superficies $\Phi = cte$ son equipotenciales y las líneas de corriente son perpendiculares a las mismas.

Cuando ρ depende sólo de p (politropía)

$$\rho = \rho(p) \quad (\text{VI.86})$$

podemos definir una función $P(\rho)$ tal que

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{VI.87})$$

o, equivalentemente

$$\vec{\nabla}P = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad (\text{VI.88})$$

Usando la identidad

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega}$$

la ecuación de Euler la podemos poner

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}U \quad (\text{VI.89})$$

donde $\frac{\vec{f}}{\rho} = -\vec{\nabla}U$. Reemplazando en esta ecuación $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$, teniendo en cuenta que $\vec{\omega} = 0$ y usando (VI.88) para un flujo potencial resulta

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + U\right) = 0 \quad (\text{VI.90})$$

Integrando se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + U = f(t) \quad (\text{VI.91})$$

Sin pérdida de generalidad $f(t)$ se puede tomar constante. Para el caso $\rho = \rho_0$ esta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + U = cte \quad (\text{VI.92})$$

que en el caso estacionario nos da

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + U = cte \quad (\text{VI.93})$$

Vemos que si $\rho = \rho_0$ la cantidad que era constante sobre cada línea de corriente para flujos estacionarios en general (ecuación de Bernoulli), en el caso de flujos irrotacionales lo es en todo el fluido.

Si además de irrotacional el flujo se puede considerar incompresible, la función potencial satisface una ecuación de Laplace. Tomando divergencia de la ecuación (VI.85) e imponiendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ resulta

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{VI.94})$$

La ecuación de Laplace es una ecuación ampliamente estudiada y aparece en muchas ramas de la física. Es una ecuación lineal y, por lo tanto, sumando soluciones se puede obtener una nueva solución (principio de superposición).

Veamos qué flujos potenciales describen algunas funciones Φ . Un movimiento a lo largo del eje x , está descrito por $\Phi = ax$, con a una constante. De la solución de la ecuación de Laplace

$$\Phi = -a \left[x^2 - \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \right]$$

se obtiene

$$v_x = -2ax \quad v_y = ay \quad v_z = az$$

Para analizar las líneas de corriente observemos que es un problema con simetría de revolución alrededor del eje x ; por lo tanto bastará estudiar las líneas de corriente en un plano que contenga al eje x , por ejemplo, $y = 0$. La ecuación de la línea de corriente es

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}$$

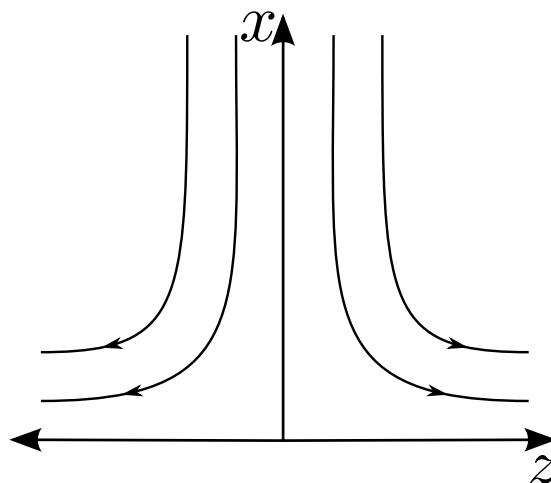
o sea

$$\frac{dx}{2ax} = \frac{dz}{-az}$$

Integrando se obtiene

$$xz^2 = cte$$

Luego, en el plano x - z las líneas de corriente tienen la forma



Para obtener la estructura de las líneas en el espacio se deberá rotar la figura alrededor del eje x . Este es el flujo que se tiene cuando un fluido ideal con velocidad uniforme en la dirección $-x$ choca con un plano $y-z$, si se supone incompresibilidad e irrotacionalidad.

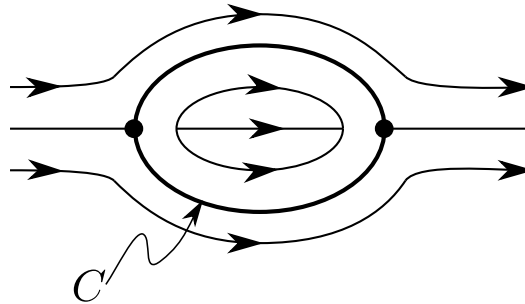
Soluciones de $\nabla^2\Phi = 0$ con simetría esférica son de la forma

$$\Phi = -\frac{a}{r}$$

si excluimos al origen, ya que en el origen diverge. Este potencial corresponde a una fuente ($a > 0$) o a un sumidero ($a < 0$) ubicados en el origen; comparar con ecuación (VI.50). Por superposición podemos construir la solución

$$\Phi = -a \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2'|} \right] + v_0 z$$

que corresponde a la perturbación en un flujo uniforme en la dirección z con velocidad v_0 producida por una fuente y un sumidero de igual potencia. El fluido que sale de la fuente y desaparece en el sumidero no se mezcla con la corriente principal. En un corte que contenga al eje z



VI.12. Flujo bidimensional incompresible e irrotacional – Uso de la variable compleja

Llamaremos flujo bidimensional cuando la velocidad no depende de una coordenada; agregaremos (aunque no es indispensable) que la componente correspondiente de la velocidad se anule. Por ejemplo:

- En cartesianas

$$\vec{v} = v_x(x, y)\check{x} + v_y(x, y)\check{y} \quad v_z = 0$$

- En cilíndricas

$$\vec{v} = v_r(r, z)\check{r} + v_z(r, z)\check{z} \quad v_\phi = 0$$

Cuando el flujo es incompresible, de la ecuación de continuidad resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Para el 1^{er} caso:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

o sea

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

por lo que existe un escalar $\Psi(x, y)$ tal que

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Ψ se denomina función corriente. Las líneas intersección de las superficies $\Psi = cte$ con $z = cte$ son líneas de corriente, ya que

$$\Psi = cte \implies d\Psi = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

de donde resulta

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

que es la ecuación de la línea de corriente.

En el 2^o caso (coordenadas cilíndricas) de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

podemos poner

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Se tendrán expresiones similares en otras simetrías.

Observemos que si el flujo, además de incompresible, es irrotacional $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ y, por lo tanto

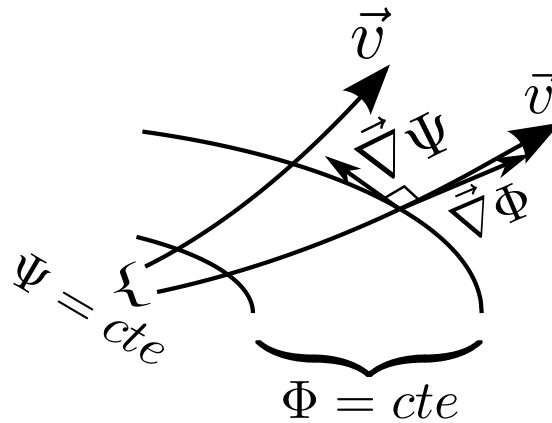
$$\nabla^2 \Psi = 0^1$$

y la función corriente satisface la ecuación de Laplace. Además, si Φ es el potencial de la velocidad, se cumple siempre que

$$\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$$

o sea que las superficies $\Psi = cte$ y $\Phi = cte$ son ortogonales (salvo en los puntos en que $\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi = 0$).

¹en cartesianas; en otras coordenadas la ecuación es distinta



VI.12.1. Uso de la variable compleja

En el caso de coordenadas cartesianas se puede hacer uso de las funciones analíticas en el plano complejo para resolver problemas bidimensionales de flujos irrotacionales incompresibles. Si construimos una función F de la variable compleja $z = x + iy$ de la siguiente manera

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (\text{VI.95})$$

donde Φ y Ψ son la función potencial y la función corriente, respectivamente, entonces F es una función analítica, ya que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} (= v_x) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} (= v_y) \quad (\text{VI.96})$$

Luego, cualquier función analítica nos permitirá obtener una posible función potencial (que satisficará $\nabla^2 \Phi = 0$) y la correspondiente función corriente (que cumple $\nabla^2 \Psi = 0$).

Para resolver el problema del flujo potencial, incompresible y bidimensional que lejos es uniforme y se encuentra con un obstáculo, hay que buscar una función corriente Ψ , solución de $\nabla^2 \Psi = 0$, que en la superficie del obstáculo sea constante, ya que allí la velocidad tiene que ser tangencial, y tal que las líneas $\Psi = cte$ tengan lejos la dirección de la velocidad entrante. En estos problemas los obstáculos deberán tener alguna simetría (por ejemplo, ser iguales a distinto z , o tener simetría axial), para poder trabajar bidimensionalmente.

Veamos el flujo contra que obstáculo está dado por la función corriente

$$\Psi = axy$$

De la relación entre velocidad y función corriente tendremos

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = ax \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ay$$

La función Ψ se anula (por lo que es constante) en $y = 0$ y las líneas de corriente $\Psi = cte$ son hipérbolas; para y grande son asíntotas al eje y . O sea que Ψ representa

el flujo bidimensional (igual para todo z) que choca con un plano en $y = 0$, y que lejos del plano tiene sentido $-y$.

Veamos cuánto vale la función potencial correspondiente; usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann (VI.96) resulta

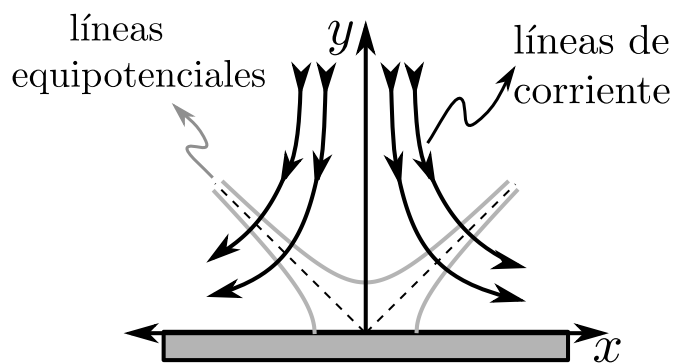
$$\begin{aligned} v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = ax & \implies \Phi(x, y) = \frac{ax^2}{2} + f(y) \\ v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ay & \implies \Phi(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Las líneas equipotenciales son de ecuación

$$\frac{a}{2}(x^2 - y^2) = cte$$

De la expresión para $\Phi(x, y)$ y que para $\Psi(x, y)$ podemos obtener la función compleja F

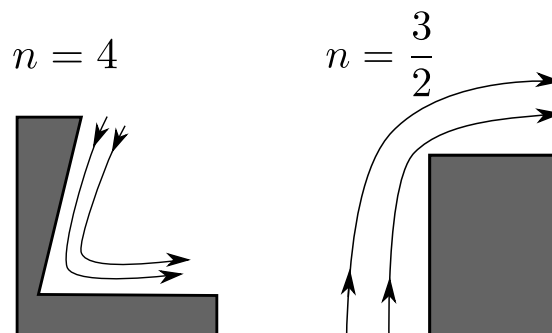
$$F = \Phi + i\Psi = \frac{1}{2}Z^2$$



Se puede mostrar que la función

$$F = \Phi + i\Psi = \frac{a}{n}Z^n$$

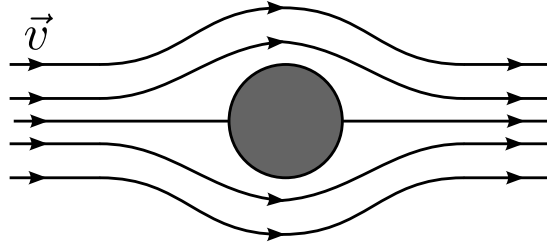
con $n = \pi/\alpha$ representa el flujo potencial sobre un obstáculo que forma un ángulo α :



La función

$$\Psi = -v_0 y \left(1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right)$$

representa las líneas de corriente de un flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro circular de radio r_0 .



Todos estos ejemplos son suponiendo que el fluido es no viscoso e incompresible, y que el flujo en todos lados es irrotacional (o potencial) y bidimensional.

Capítulo VII

Fluidos reales

VII.1. Fluidos reales – Viscosidad – Ecuación de Navier-Stokes

Los fluidos reales tienen viscosidad, en un fluido en movimiento las tensiones de corte entre elementos de materia adyacentes son distintos de cero si la velocidad no es uniforme.

Pondremos el tensor de tensiones como suma de dos términos

$$\tau_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau'_{ik} \quad (\text{VII.1})$$

El término $-p\delta_{ik}$ es el tensor de tensiones en los fluidos ideales y en los fluidos en reposo. El término τ'_{ik} es el tensor de tensiones viscosas.

La forma general del tensor τ'_{ik} se puede establecer de la siguiente manera. Los procesos de fricción interna debidos a la viscosidad ocurren solamente si los diferentes elementos de fluido tienen distinta velocidad, de modo que haya un movimiento relativo entre ellos. Por lo tanto, τ'_{ik} dependerá de las derivadas espaciales de la velocidad, o sea, será una combinación de las derivadas $\partial v_i / \partial x_k$. Pero tampoco se notarán los efectos de la viscosidad si el fluido rota como un cuerpo rígido en una rotación uniforme; en ese caso la dependencia espacial de la velocidad será de la forma

$$v_l = \varepsilon_{ljm} \Omega_j x_m$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{kji} \Omega_j$$

o sea

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kji}) \Omega_j = 0$$

Luego el tensor de tensiones viscosas τ'_{ik} deberá depender de las combinaciones simétricas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

para que se anule tanto si la velocidad es uniforme como si el movimiento es una rotación uniforme¹. El tensor de segundo rango más general que se puede construir con estas condiciones es

$$\tau'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \quad (\text{VII.2})$$

donde a y b son dos escalares. Reescribiremos esta expresión de una manera diferente, redefiniendo los escalares

$$\tau'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \quad (\text{VII.3})$$

La expresión entre paréntesis tiene traza nula, o sea, se anula por contracción de índices. Las constantes η ² y ζ ³ se llaman coeficientes de viscosidad, y se puede mostrar, usando argumentos termodinámicos, que son positivos

$$\eta > 0 \quad \zeta > 0 \quad (\text{VII.4})$$

La componente i -ésima de la fuerza volumétrica equivalente debida a la viscosidad es

$$\frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k}$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento de un elemento de fluido real será (ver ecuación VI.14)

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k} + f_i$$

o sea

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \right) = & - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

Los coeficientes η y ζ dependen de la temperatura, y como ésta puede no ser uniforme, no siempre se pueden sacar fuera de la derivación. Pero en muchos casos los coeficientes de viscosidad no cambian demasiado a lo largo del fluido y se pueden

¹Supondremos una dependencia lineal, o sea, un fluido Newtoniano.

² η : Viscosidad de corte o dinámica.

³ ζ : Viscosidad volumétrica, o 2^{do} coeficiente viscoso.

aproximar por constantes. En adelante, supondremos que estamos en ese caso, en el que

$$\frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_i \partial x_l}$$

O sea

$$\frac{\partial \tau'_{ik}}{\partial x_k} = \left[\eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]_i$$

Podemos escribir entonces la ecuación de movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\text{VII.6})$$

siendo \vec{f} la densidad de fuerzas volumétricas.

Para un fluido viscoso incompresible, resulta:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{VII.7})$$

esta es la ecuación de Navier-Stokes. El tensor de tensiones en un fluido incompresible toma la forma simple

$$\tau_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (\text{VII.8})$$

La viscosidad en este caso queda determinada por un solo coeficiente, η , llamado viscosidad dinámica, y es el que generalmente es de importancia. Se define también la viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{VII.9})$$

Los valores a 20°C para algunas sustancias son

	η (g/cm seg)	ν (cm ² /seg)
Agua	0,010	0,010
Aire	0,00018	0,150
Glicerina	8,5	6,8

La viscosidad dinámica de los gases a una dada temperatura es independiente de la presión. La viscosidad cinemática, en cambio, es inversamente proporcional a la presión.

Las condiciones de contorno de un fluido ideal, en lo que respecta a la velocidad, eran solamente que la componente normal de la velocidad del fluido debía ser igual a la componente normal de la velocidad de la superficie de contorno. Pero para fluidos reales hay que tener en cuenta que siempre hay fuerzas de atracción molecular entre un fluido viscoso y la superficie de un cuerpo sólido, por lo que la capa de fluido inmediatamente adyacente al sólido está en reposo relativo con el mismo. Por lo tanto la condición de contorno para un fluido viscoso es

$$\vec{v} = \vec{V}_s \quad (\text{VII.10})$$

donde \vec{V}_s es la velocidad de la superficie de contorno.

La fuerza por unidad de área que el fluido ejerce sobre un sólido sumergido es

$$T_i = \tau_{ik} n_k = -pn_i + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) n_k \quad (\text{VII.11})$$

donde \vec{n} es la normal saliente del sólido.

VII.2. Flujo laminar y flujo turbulento – Número de Reynolds – Límites $R \gg 1$ y $R \ll 1$

La influencia de la viscosidad en el movimiento de los fluidos depende fuertemente del valor del coeficiente de viscosidad, de la velocidad y de la longitud característica del fenómeno. Cuando la viscosidad es muy baja, el flujo sólo resulta modificado en las cercanías de un cuerpo sólido. Allí las líneas de corriente tienden a ser inestables y, en ese caso, el flujo se transforma en turbulento; si la viscosidad es muy alta, el flujo vuelve a ser estable. En sus clásicos experimentos, Reynolds hizo fluir agua en tubos de vidrio horizontales, saliendo de un recipiente en que el agua estaba tranquila. En el centro de los tubos inyectó agua coloreada, obteniendo dos tipos de comportamiento muy diferentes: uno turbulento, con remolinos; y otro laminar (velocidad en dirección del eje del tubo). El tipo de comportamiento dependía de la velocidad del agua. El laminar ocurría a bajas velocidades, y, el turbulento, a altas. El parámetro adimensional que determina que comportamiento ocurre es el número de Reynolds

$$R = \frac{v_0 l_0}{\nu} \quad (\text{VII.12})$$

donde v_0 es la velocidad media, l_0 una longitud característica y ν la viscosidad cinemática. En el caso del tubo, l_0 es el radio r_0 del tubo. El número de Reynolds aumenta con la velocidad y con la escala de longitudes y disminuye al aumentar la viscosidad. Para un número de Reynolds grande (en el caso del tubo con agua $R \gtrsim 30$) se tendrá turbulencia; para el aire, al tener una viscosidad cinemática mayor que el agua, para el mismo radio, se tendrá régimen laminar hasta velocidades mucho mayores.

El número de Reynolds permite analizar si en la ecuación de Navier-Stokes es más importante el término viscoso

$$\rho \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{VII.13})$$

o el término inercial debido a la variación espacial de la velocidad (término advectivo o convectivo)

$$\rho \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \quad (\text{VII.14})$$

Este último es del orden de

$$\frac{\rho v_0^2}{l_0}$$

o menor si intervienen factores direccionales, como por ejemplo, que la velocidad varíe sólo en la dirección perpendicular a sí misma. El término viscoso es del orden

$$\frac{\rho \nu v_0}{l_0^2}$$

por lo que

$$\frac{\text{término convectivo}}{\text{término viscoso}} \approx \frac{\rho v_0^2 / l_0}{\rho \nu v_0 / l_0^2} = \frac{v_0 l_0}{\nu} = R \quad (\text{VII.15})$$

Si el número de Reynolds es mucho mayor que uno, ya sea porque la viscosidad cinemática ν sea chica, o porque la velocidad sea grande o la escala de longitudes sea grande, la viscosidad puede despreciarse salvo en una pequeña región cerca de algún cuerpo sólido (capa límite).

En cambio, si el número de Reynolds es muy pequeño, la ecuación de Navier-Stokes se puede aproximar por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\vec{f}}{\rho} \quad (\text{VII.16})$$

En el caso estacionario, despreciando la fuerza volumétrica, queda la ecuación simple

$$\vec{\nabla} p = \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{VII.17})$$

que, junto con la ecuación de continuidad en el caso incompresible $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, la condición de incompresibilidad en el caso estacionario $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$ y las condiciones de contorno, determinan el movimiento. Es interesante notar que en este caso la vorticidad satisface una ecuación de Laplace. Tomando rotor de la ecuación (VII.17) resulta

$$\nabla^2 \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) = \nabla^2 \vec{\omega} = 0 \quad (\text{VII.18})$$

VII.3. Modificación de la presión debido a la gravedad para ρ uniforme

Consideremos un fluido incompresible con ρ uniforme bajo la acción de la gravedad. La ecuación de movimiento es

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho_0 \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{VII.19})$$

y junto con $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ y las condiciones iniciales y de contorno son suficientes para determinar el movimiento. Definiendo la presión modificada

$$p' = p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r} \quad (\text{VII.20})$$

se tiene

$$\vec{\nabla} p' = \vec{\nabla} p - \rho_0 \vec{g} \quad (\text{VII.21})$$

Luego la ecuación (VII.19) se puede escribir

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p' + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{VII.22})$$

en la que no aparece la fuerza de gravedad. Vemos entonces que la acción de la gravedad se reduce, en el caso de densidad uniforme, a modificar la presión en una cantidad $\rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r}$ ($= -\rho_0 g z$ si z es la altura), y no tiene efecto sobre la distribución de la velocidad. Esto es así siempre que la presión varíe con g como $-\rho g z$ en las condiciones de contorno. Esto no ocurre, por ejemplo, si un contorno es una superficie libre que no está a altura constante (como podría ser un líquido en rotación).

VII.4. Flujo unidireccional estacionario

Lo que dificulta sobremanera la resolución de las ecuaciones (VII.19) o (VII.22) es la no-linealidad proveniente del término convectivo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ en la derivada substancial de la velocidad. El problema se simplifica mucho cuando este término, o bien se desprecia como en la ecuación (VII.16), o se anula, como sucede cuando la velocidad tiene siempre la misma dirección, digamos x .

En ese caso, de la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles, resulta que v_x no puede variar en la dirección del flujo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Entonces

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x \vec{i} = 0 \quad (\text{VII.23})$$

Una situación así puede aparecer en un cilindro lejos de las puntas, si la velocidad en la dirección del cilindro se produce por diferencia de la presión en los extremos y la

viscosidad es suficiente como para hacer decaer las componentes de la velocidad en direcciones transversales, y no hay turbulencia.

Para el caso estacionario, la ecuación (VII.22) y teniendo en cuenta (VII.23) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial p'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial x} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

De $\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\partial p'}{\partial z} = 0$ resulta que p' y, por lo tanto, $\frac{\partial p'}{\partial x}$, no pueden depender de y o z . Como v_x no depende de x , $\partial p'/\partial x$ no puede depender tampoco de x , y por lo tanto es una constante

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -G \quad (\text{VII.25})$$

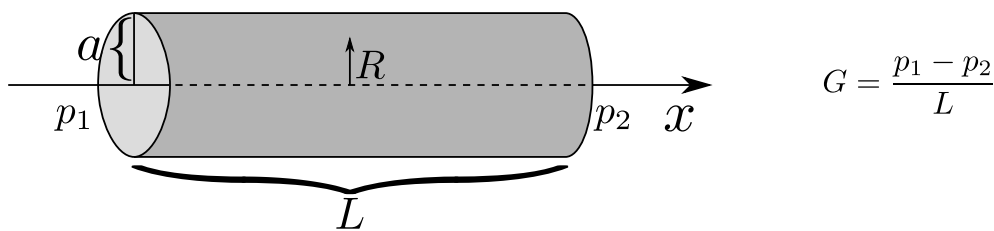
Luego, v_x satisface

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{G}{\eta} \quad (\text{VII.26})$$

Para resolver esta ecuación es necesario dar condiciones de contorno, que generalmente consisten en dar el gradiente de presión (modificada, si hay gravedad), $-G$, dando la diferencia de la presión en los extremos, y dar el valor de v_x para determinados valores de y ó z .

VII.4.1. Flujo de Poiseuille

Calcularemos el flujo en un tubo cilíndrico largo, de radio a , y sección circular, producido por una diferencia de presión en los extremos, problema estudiado por Poiseuille en 1840. Despreciaremos g . Supondremos simetría axial, por lo que la velocidad v_x dependerá sólo de la distancia R al eje del cilindro



En este caso la ecuación (VII.26) se reduce a

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dv_x}{dR} \right) = -\frac{G}{\eta} \quad (\text{VII.27})$$

donde hemos usado la expresión del laplaciano en coordenadas cilíndricas, y que v_x depende sólo de R . Multiplicando ambos miembros de (VII.27) por R e integrando

resulta

$$R \frac{dv_x}{dR} = -\frac{GR^2}{2\eta} + A$$

Dividiendo esta ecuación por R e integrando nuevamente se llega a la solución general de (VII.27)

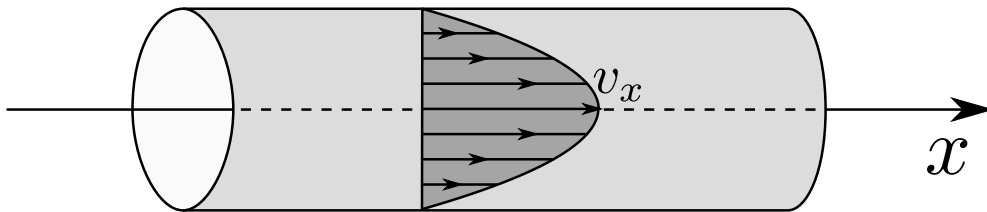
$$v_x(R) = -\frac{GR^2}{4\eta} + A \ln(R) + B \quad (\text{VII.28})$$

donde A y B son dos constantes. Para que no aparezca una singularidad sobre el eje, elegimos $A = 0$. Para determinar B usamos la condición de contorno

$$v_x(R = a) = 0$$

con lo que

$$v_x = \frac{G}{4\eta} (a^2 - R^2) \quad (\text{VII.29})$$



VII.5. Parámetros adimensionales – Ley de similitud

Los parámetros adimensionales se construyen multiplicando o haciendo el cociente entre diferentes magnitudes que sean representativas del estado del fluido, de modo de obtener un número adimensional. Los valores que toman son indicadores del tipo de comportamiento del fluido.

El *número de Mach* es el cociente entre una velocidad característica del fluido y la velocidad del sonido en el mismo

$$M = \frac{v_0}{c_s} \quad (\text{VII.30})$$

Vimos que una de las condiciones para que un flujo se pueda considerar incompresible es que $v_0 \ll c_s$ (ver VI.10.1), o sea

$$M \ll 1$$

El número de Mach permite establecer si, en la ecuación de movimiento, el término convectivo $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ es de mayor o menor peso que el debido a la presión; este último es del orden de

$$\frac{p}{l_0}$$

y el primero, salvo factores direccionales, es del orden de

$$\rho \frac{v_0^2}{l_0}$$

Luego, en órdenes de magnitud

$$\frac{\text{término convectivo}}{\text{término debido a la presión}} \approx \frac{\rho v_0^2}{p} \approx \frac{v_0^2}{c_s^2} = M^2$$

Si $M \gg 1$ el término convectivo puede ser de mucho mayor peso que el debido a la presión en una ecuación de movimiento en la que hay varios términos, pero hay que tener en cuenta factores direccionales. Cuando queda una ecuación reducida a

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p$$

los dos términos son siempre iguales. En este caso, si el número de Mach es muy grande, será necesario que la velocidad varié poco con la dirección de movimiento, de modo que $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ sea pequeño aunque \vec{v} sea grande.

Otro parámetro adimensional muy importante es el *número de Reynolds*, ya mencionado anteriormente y que sirve para estimar la influencia de la viscosidad en un dado fluido. Si bien no veremos más que estos en el presente curso, hay muchos parámetros adimensionales en la teoría de los fluidos.

Consideremos ahora un fluido con densidad constante bajo la acción de la gravedad; usando la presión modificada $p' = p - \rho_0 \vec{g} \cdot \vec{r}$, las ecuaciones que gobiernan el fluido son

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.31})$$

Sea l_0 una longitud característica del problema, como por ejemplo, el diámetro de una esfera sólida en la corriente; v_0 una velocidad característica del fluido; p'_0 un valor característico de la presión modificada. Podemos definir con ellos las siguientes magnitudes

$$V_i = \frac{v_i}{v_0} \quad X_i = \frac{x_i}{l_0} \quad T = t \frac{v_0}{l_0} \quad P = \frac{p' - p'_0}{\rho_0 v_0^2} \quad (\text{VII.32})$$

y en función de ellos las ecuaciones (VII.31) quedan

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial X_j} = - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_k \partial X_k} \quad (\text{VII.33})$$

donde R es el número de Reynolds

$$R = \frac{l_0 v_0 \rho_0}{\eta}$$

El cambio a variables adimensionales muestra que si se conoce la solución para un flujo particular, se obtienen inmediatamente las soluciones para flujos que tengan condiciones de contorno y condiciones iniciales iguales, si se expresan en forma adimensional, aunque los valores de l_0 , v_0 , ρ_0 , p'_0 y η sean diferentes, siempre que el número de Reynolds sea igual. Todas las soluciones en estos casos están descritas por la misma solución en variables adimensionales. Esta es la ley de similitud.

VII.6. Capa límite

Aunque en la mayor parte del volumen ocupado por un fluido con número de Reynolds grande, éste puede ser considerado como un fluido ideal, esta aproximación no puede ser usada en las cercanías de las paredes de un cuerpo sólido. Esto se debe a que las condiciones de contorno para un fluido viscoso, $\vec{v} = \vec{V}_s$, son diferentes a las de un fluido ideal que sí puede deslizar a lo largo del sólido. Supongamos que el obstáculo está quieto; el fluido debe anular su velocidad en la inmediata proximidad del sólido, debido a la viscosidad, aún cuando en el resto del fluido esta no tenga efecto. En los fluidos con número de Reynolds grande, ésta disminución de velocidad ocurre en una capa muy fina adyacente a las paredes del sólido, esta se llama capa límite (*boundary layer*) y está caracterizada por fuertes variaciones en dirección normal a la pared, de la componente de la velocidad del fluido tangente a dicha pared. El flujo en la capa límite puede ser laminar o turbulento.

En el caso laminar se pueden hacer aproximaciones en la ecuación de movimiento, basadas en que la variación de la velocidad en dirección tangente a las paredes del sólido es mucho menor que en dirección perpendicular. Finalmente se obtiene una estimación del espesor de la capa límite. Si l_0 representa una distancia característica de variación de la velocidad en la dirección tangente a la superficie (que puede ser del orden de la dimensión del obstáculo), y R es el número de Reynolds para el flujo en su conjunto (no en la capa límite), entonces el espesor δ de la capa es, para $R \gg 1$, del orden de

$$\delta = \frac{l_0}{\sqrt{R}} \quad (\text{VII.34})$$

Cuando el número de Reynolds local en la capa es muy grande, el flujo, allí, se hace turbulento. La fuerza de fricción en la pared en una capa límite turbulenta es considerablemente mayor que en una laminar.

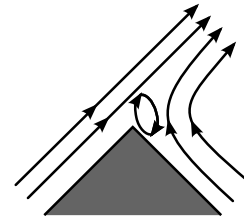
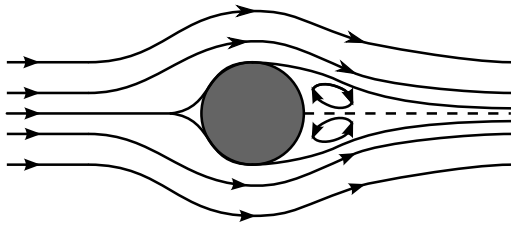
A diferencia de lo que sucede con la componente tangencial de la velocidad, la variación de la presión a través de la capa límite es pequeña.

El hecho de que en la capa límite la velocidad varíe fuertemente en dirección perpendicular a la misma, implica que los valores de la vorticidad son grandes. Por lo tanto, el flujo en la capa límite, es rotacional.

La vorticidad que se produce en un fluido real en la superficie de contacto con un cuerpo sólido debido a la condición de no-deslizamiento se difunde al resto del fluido por acción de la viscosidad si el número de Reynolds es bajo; si en cambio el

término convectivo es grande respecto al viscoso o difusivo (n° de Reynolds alto), la vorticidad originada en la superficie de contacto con el sólido es arrastrada hacia la parte posterior del cuerpo, y para n° de Reynolds muy alto queda confinada a una capa muy fina alrededor del cuerpo (capa límite) y a una estela turbulenta (*calle de vórtices*).

Cuando el n° de Reynolds es alto, las líneas de corriente que pasan cerca de la parte frontal del cuerpo sólido suelen separarse de los costados y encerrar al fluido en movimiento lento y no estacionario. Esto se conoce como separación de la capa límite y aparece cuando el fluido, al acercarse al cuerpo, pero fuera de la capa límite, disminuye fuertemente su velocidad. También puede ocurrir si hay bordes salientes.



Apéndice A

Resultados matemáticos

A.1. Cálculo vectorial

A.1.1. Identidades vectoriales

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \varphi)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

A.1.2. Teoremas integrales

Sean ϕ , ψ funciones escalares y \vec{F} una función vectorial, todas bien comportadas. V es un volumen tridimensional con elemento de volumen dV . S es una superficie cerrada bidimensional, frontera de V , con elemento de área dS y con normal unitario saliente en dS . Valen las siguientes igualdades

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{Teorema de la divergencia})$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \psi \, dV = \oiint_S \psi \vec{n} \, dS$$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{F} \, dV = \oiint_S \vec{n} \times \vec{F} \, dS$$

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) \, dV = \oiint_S \phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dS \quad (1^{\text{ra}} \text{ identidad de Green})$$

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \oiint_S (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{Teorema de Green})$$

Ahora, sea S una superficie abierta y C su curva frontera, con elemento de línea $d\vec{l}$. La normal \vec{n} de S está definida por la regla de la mano derecha en relación con el sentido en que se recorre la integral alrededor de C .

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Teorema de Stokes})$$

$$\iint_S \vec{n} \times \vec{\nabla} \psi \, dS = \oint_C \psi \, d\vec{l}$$

A.1.3. Operadores diferenciales en diferentes sistemas de coordenadas

Coordenadas Cartesianas

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{z} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{z}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

La relación con el sistema cartesiano está dada por

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

y sea un vector $\vec{A} = A_\rho \check{\rho} + A_\theta \check{\theta} + A_z \check{z}$, se pueden obtener las siguientes expresiones para los operadores diferenciales más usados

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \check{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \check{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \check{z} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \check{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \check{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \check{z} \\ \nabla^2 \psi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Coordenadas esféricas

La relación con el sistema cartesiano está dada por

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

y sea un vector $\vec{A} = A_r \check{r} + A_\varphi \check{\varphi} + A_\theta \check{\theta}$, se pueden obtener las siguientes expresiones

para los operadores diferenciales más usados

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\check{r} + \frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\check{\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\check{\theta} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}(\theta)A_\theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{A} = & \frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\text{sen}(\theta)A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\check{r} + \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\check{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\text{sen}(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\check{\theta} \end{aligned}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\text{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

Apéndice B

Elasticidad

B.1. Relaciones entre diferentes constantes elásticas

Las ecuaciones (IV.40), (IV.41) y (IV.42) dan κ, E, σ en función de λ y μ . Sin embargo, cualquiera de las constantes elástica λ, μ, κ, E ó σ se pueden poner en función de dos de ellas cualesquiera, como muestra la **Tabla B.1**

	E	σ	κ	μ	λ
E, σ	E	σ	$\frac{E}{3(1-2\sigma)}$	$\frac{E}{2(1+\sigma)}$	$\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$
E, κ	E	$\frac{3\kappa-E}{6\kappa}$	κ	$\frac{3\kappa E}{9\kappa-E}$	$\frac{3\kappa(3\kappa-E)}{9\kappa-E}$
E, μ	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	μ	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$
E, λ ¹	E	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+\sqrt{\lambda^2+9\mu^2}}$	$\frac{E+3\lambda+\sqrt{\lambda^2+9\mu^2}}{6}$	$\frac{E-3\lambda+\sqrt{\lambda^2+9\mu^2}}{4}$	λ
σ, κ	$3\kappa(1-2\sigma)$	σ	κ	$\frac{3\kappa(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}$	$\frac{3\kappa\sigma}{1+\sigma}$
σ, μ	$2\mu(1+\sigma)$	σ	$\frac{2\mu(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}$	μ	$\frac{2\mu\sigma}{1-2\sigma}$
σ, λ	$\frac{\lambda(1+\sigma)(1-2\sigma)}{\sigma}$	σ	$\frac{\lambda(1+\sigma)}{3\sigma}$	$\frac{\lambda(1-2\sigma)}{2\sigma}$	λ
κ, μ	$\frac{9\kappa\mu}{6\kappa+\mu}$	$\frac{3\kappa-2\mu}{6\kappa+2\mu}$	κ	μ	$k - \frac{2}{3}\mu$
κ, λ	$\frac{9\kappa(\kappa-\lambda)}{3\kappa-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3\kappa-\lambda}$	κ	$\frac{2}{3}(\kappa-\lambda)$	λ
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$	μ	λ

Cuadro B.1: Relaciones entre constantes elásticas

$$^1 \sqrt{\lambda^2 + 9\mu^2 + 2E\lambda}$$

B.2. Ecuaciones de la elasticidad en coordenadas curvilíneas

Consideremos un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (y_1, y_2, y_3) . La distancia entre dos puntos cercanos se puede poner

$$ds^2 = h_1^2 dy_1^2 + h_2^2 dy_2^2 + h_3^2 dy_3^2 \quad (\text{B.1})$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas

$$y_1 = r \quad y_2 = \theta \quad y_3 = \varphi \quad (\text{B.2})$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \operatorname{sen}(\theta)$$

y en coordenadas cilíndricas

$$y_1 = r \quad y_2 = \theta \quad y_3 = z \quad (\text{B.3})$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$$

El tensor de deformaciones en función del vector desplazamiento

$$\vec{u} = u_1 \check{y}_1 + u_2 \check{y}_2 + u_3 \check{y}_3$$

se escribe (ver **Nota**)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_i}{h_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{u_i}{h_i} \right) + \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{u_j}{h_j} \right) + 2\delta_{ij} \sum_k \frac{u_k}{h_k h_j} \frac{\partial h_i}{\partial y_k} \right] \quad (\text{B.4})$$

En coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \\ & & &+ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + & 2\varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \cos(\theta) \right) + \\ &+ \cos(\theta) \frac{u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r} & &+ \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & 2\varepsilon_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

La ecuación de equilibrio estático en coordenadas curvilíneas ortogonales se escribe (ver **Nota**).

$$f_i + \frac{1}{h_i} \left\{ \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial y_m} \left(\frac{h_i}{h_m} \tau_{im} \right) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial y_m} (h_1 h_2 h_3) \right) \tau_{im} \frac{h_i}{h_m} - \tau_{mm} \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial y_i} \right] \right\} = 0 \tag{B.7}$$

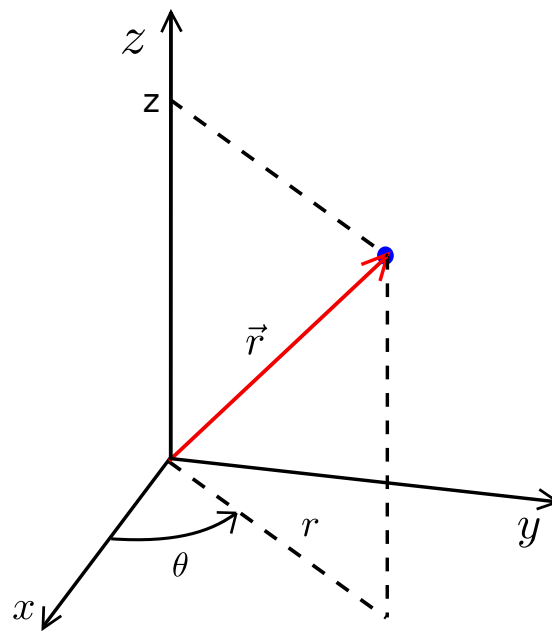
Nota Aquí no se debe usar la convención de Einstein por lo que índices repetidos no implican suma. Las componentes que se escriben aquí son *físicas* y no *covariantes* ni *contravariantes*.

Apéndice C

Fluidos

C.1. Coordenadas cilíndricas

Para las expresiones que se encuentran en esta sección, las coordenadas cilíndricas r^1 , θ y z se consideran definidas como muestra la siguiente figura:



¹Se utilizó r para denotar la distancia axial, para evitar confusiones con ρ la densidad. Notar que la definición de r cambia entre esta sección y la siguiente (coordenadas esféricas).

C.1.1. Tensor de tensiones

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\
\tau_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \tau_{\theta z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\
\tau_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} & \tau_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{C.1}$$

C.1.2. Ecuación de continuidad

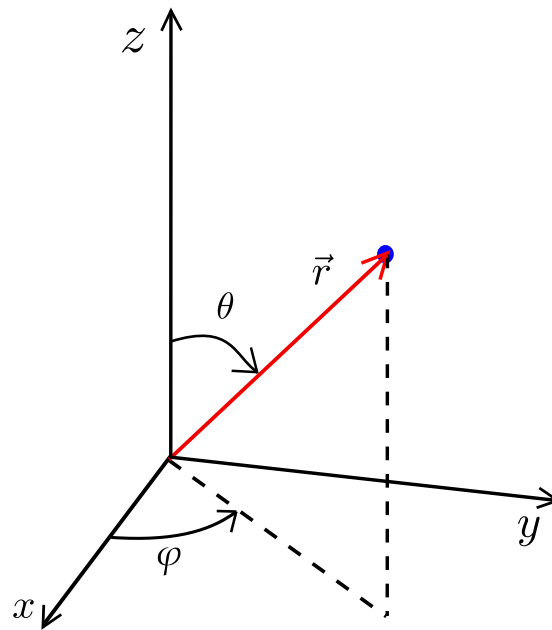
$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{C.2}$$

C.1.3. Ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= \\
&= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + f_r, \\
\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + f_\theta, \\
\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \\
&= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + f_z.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

C.2. Coordenadas Esféricas

Para las expresiones que se encuentran en esta sección, las coordenadas esféricas r , θ y φ se consideran definidas como muestra la siguiente figura:



C.2.1. Tensor de tensiones

$$\begin{aligned}
 \tau_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & \tau_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\
 \tau_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot(\theta)}{r} \right) & \tau_{\varphi\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \cot(\theta)}{r} \right) \\
 \tau_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \tau_{\theta r} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

C.2.2. Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot(\theta)}{r} = 0 \tag{C.5}$$

C.2.3. Ecuación de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot(\theta)}{r^2} v_\theta \right] + f_r, \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot(\theta)}{r} \right) = \\
 & = -\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \right] + f_\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot(\theta)}{r} \right) = \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv_\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \right] + f_\theta.
 \end{aligned}$$

Bibliografía y software utilizado

- [1] C.E. Pearson, *Theoretical Elasticity*.
- [2] L.D. Landau y E.M. Lifshitz *Theory of Elasticity*.
- [3] TexXStudio, *Editor muy completo de L^AT_EX* (texstudio.sourceforge.net/).
- [4] ShareLaTeX, *Editor online colaborativo de L^AT_EX* (www.sharelatex.com/).
- [5] Inkscape, *Edición de gráficos vectoriales* (<http://www.inkscape.org/>).